

Lenka MEŇKYOVÁ

ALGORITMUS INTERPOLÁCIE RASTROVÉHO MODELU GEORELIÉFU LAGRANGEOVÝMI POLYNÓMAMI

Meňkyová L.: The algorithm of georelief raster model interpolation using Lagrange polynoms. Kartografické listy 2004, 12, 10 figs., 1 tab., 10 refs.

Abstract: For several decades geo-science disciplines have been using interpolation methods for creation of digital georelief models. This article is focused on digital elevation model calculations for irregular discrete input fields of vectorised contours, design of interpolation algorithm using the Lagrange interpolation method in the direction of gradient, taking into account the geometric properties of georelief models. Obtained results are compared using simple statistical methods like Kriging and Spline with tension and implemented in software used in the model creation.

Keywords: georelief modelling, interpolation, Lagrange interpolation method, grid

Úvod

Pozornosť mnohých oblastí sa v súčasnosti sústreďuje na modelovanie rôznorodých objektov, im prislúchajúcich veličín, javov a procesov s cieľom vytvoriť čo najvernejší exaktné matematicky definovaný model s interdisciplinárnym využitím. Zdrojovými údajmi pre tvorbu modelov sú kvantitatívne, ako aj kvalitatívne veličiny charakterizujúce modelovaný objekt, jav alebo proces. Z nich sa vytvára model na základe teoretickej koncepcie a overeného matematického aparátu, pracujúceho podľa vopred určenej logickej postupnosti.

Veľký dôraz sa z hľadiska modelovania priestorovo lokalizovaných údajov kladie na tvorbu modelov georeliéfu, ktorý vplýva na priestorovú diferenciáciu procesov a spoločenských aktivít v geografickej sfére. Zložitosť matematického vyjadrenia georeliéfu je vzhľadom na jeho priestorovú a časovú dynamiku pomerne vysoká. Ak sú však zmeny georeliéfu vo zvolenej mierke a príslušnej rozlišovacej úrovni z hľadiska časovej dynamiky nevyjadriteľné, môžeme georeliéf v tomto časovom okamihu študovať ako statickú plochu, ktorá je v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z \rangle$ vyjadrená funkciou dvoch nezávislých premenných x, y : $z = f(x, y)$ [4]. Takto určená výška z je podľa [5] prvkom množiny

$$G_{RF} = \{z, \Delta z, \gamma_N, A_N, (K_N)_n \equiv \omega, (K_N)_1, K_n, N_n F, N_i F, K_r F, F, \dots\},$$

kde:

- z – nadmorská výška georeliéfu ako funkcia polohy x, y ,
- Δz – relatívna výška v smere spádovej krivky,
- γ_N – sklon georeliéfu v smere spádovej krivky,
- A_N – orientácia georeliéfu voči svetovým stranám, atď.

vyjadrujúcej geometrickú štruktúru spomínanej plochy substituujúcej georeliéf. Keďže výpočet ostatných prvkov vyššie uvedenej množiny je závislý na parciálnych deriváciách spomínaných výšok, zamerali sme sa v tomto príspevku na ich modelovanie. Samotné modelovanie priestorových

štruktúr v modeloch georeliéfu pozostáva z výberu vhodnej funkcie definujúcej plochu modelovanej veličiny. Klasifikáciou, opisom prípadne implementáciou takýchto funkcií v modelovaní georeliéfu sa zaoberajú práce [1], [2], [3], [6], [7], [8], [9].

Všeobecný opis programu na výpočet výšky v gride použitím Lagrangeovej interpolačnej metódy

Samotný program sa skladá z nasledujúcich modulov:

1. Načítanie a analýza vstupných údajov.
2. Identifikácia jednotlivých vrstevníc vo vstupných údajoch.
3. Výpočet výšky v konkrétnom bode gridu, ako aj možnosť určenia bodov gridu v zadaných medziach.
4. Výstup údajov do súboru.

Načítanie a analýzu vstupných údajov sme realizovali z textového súboru so štruktúrou údajov x, y, z usporiadaných podľa vrstevníc. Ďalej sme uskutočnili rozdelenie vrstevníc na základe výšok a pridanie týchto vrstevníc do zoznamu *zoznam_vrstevnic*. Treba poznamenať, že jednu vrstevnicu v zozname predstavuje spojitá časť príslušnej vrstevnice v danom území, ktorá nie je prerušená terénnymi hranami. V prípade prerušení vrstevnice je táto v príslušnej štruktúre reprezentovaná príslušným počtom vrstevníc v závislosti od počtu nespojitostí.

Ťažiskom celého programu je však 3. modul, ktorý je opísaný nižšie.

Implementácia Lagrangeovej interpolačnej metódy

Dôvodom použitia interpolačnej funkcie je určenie výšok bodov gridu, ako príklad digitálneho výškového modelu s pravidelnou štruktúrou podľa [10], a to prostredníctvom Lagrangeovho interpolačného polynómu, ktorý nahradí spojitou funkciou body reprezentujúce časť spádnice v okolí určovaného bodu v príslušnom spádnicovom reze [6]. Body reprezentujúce spádnicu patria do množiny priesečníkov spádnice:

$$P = \{X_i(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{i=n}$$

prechádzajúcej určovaným bodom s vrstevnicami, pričom množina P je usporiadanou podľa z . Na interpoláciu výšky v určovanom bode X , ak X leží medzi bodmi X_i a X_{i+1} množiny P , použijeme podmnožinu $R \subset P$, pre ktorú platí:

$$R = \{X_j(x_j, y_j, z_j)\}_{j=i-1}^{j=i+2}$$

Pre naše potreby upravíme a rozpíšeme Lagrangeov interpolačný polynóm n -tého stupňa, ako polynóm 3. stupňa prechádzajúci bodmi reprezentujúcimi spádnicu nasledovne:

$$z = z_1 \cdot \frac{(d-d_1) \cdot (d-d_2) \cdot (d-d_3)}{(-d_1) \cdot (-d_2) \cdot (-d_3)} + z_2 \cdot \frac{d \cdot (d-d_2) \cdot (d-d_3)}{d_1 \cdot (d_1-d_2) \cdot (d_1-d_3)} + z_3 \cdot \frac{(d-d_1) \cdot d \cdot (d-d_3)}{(d_2-d_1) \cdot d_2 \cdot (d_2-d_3)} + z_4 \cdot \frac{(d-d_1) \cdot (d-d_2) \cdot d}{(d_3-d_1) \cdot (d_3-d_2) \cdot d_3}$$

kde:

z_j – hodnota výšky v bode C_j

$$R = \{X_j(x_j, y_j, z_j)\}_{j=i-1}^{j=i+2} = \{C_j(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^{j=4}$$

d_j – vzdialenosť bodov C_{j+1} od bodu C_1

d – vzdialenosť interpolovaného bodu X od bodu C_1

Uvedený polynóm použijeme aj v reze x a y , ktoré prechádzajú bodom X a sú reprezentované bodmi B_j (usporiadané podľa y) a A_j (usporiadané podľa x).

Vo všeobecnosti pre funkciu z môžeme písať, že:

$$z = f(d)$$

$$f(d) = k_1 \cdot f_1(d) + k_2 \cdot f_2(d) + k_3 \cdot f_3(d) + k_4 \cdot f_4(d)$$

kde k_1, k_2, k_3, k_4 sú konštantné členy funkcie $f(d)$:

$$k_1 = \frac{z_1}{(-d_1) \cdot (-d_2) \cdot (-d_3)}$$

$$k_2 = \frac{z_2}{d_1 \cdot (d_1 - d_2) \cdot (d_1 - d_3)}$$

$$k_3 = \frac{z_3}{(d_2 - d_1) \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_3)},$$

$$k_4 = \frac{z_4}{(d_3 - d_1) \cdot (d_3 - d_2) \cdot d_3}$$

a f_1, f_2, f_3, f_4 zložky funkcie $f(d)$:

$$f_1(d) = (d - d_1) \cdot (d - d_2) \cdot (d - d_3)$$

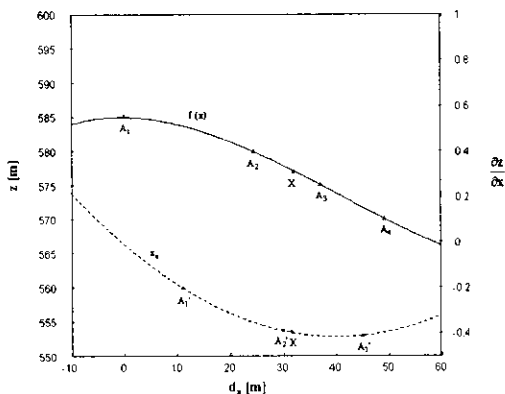
$$f_2(d) = d \cdot (d - d_2) \cdot (d - d_3)$$

$$f_3(d) = (d - d_1) \cdot d \cdot (d - d_3)$$

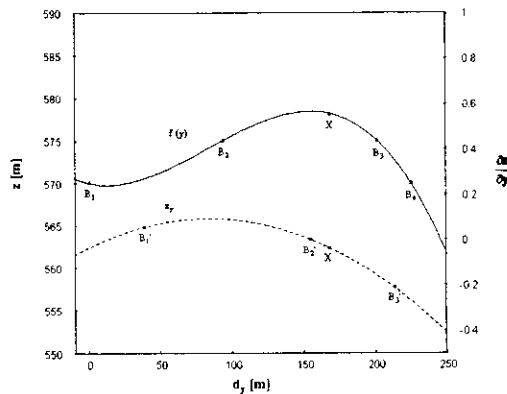
$$f_4(d) = (d - d_1) \cdot (d - d_2) \cdot d$$

Interpolácia samotnej výšky v bode gridu sa skladá z týchto krokov (modul č. 3 programu):

- Zistenie štvorice priesečníkov priamky prechádzajúcej príslušným bodom gridu v smere x (y -ový rez) resp. y (x -ový rez) s vrstevnicami, potrebné na výpočet zložiek gradientu, ktorý nám určí smer spádnic v požadovanom bode X ,
- Výpočet hodnoty a určenie polohy (x, y) parciálnych derivácií z_x, z_y medzi jednotlivými priesečníkmi v smere x a y ,
- Určenie hodnôt derivácií z_x, z_y a výpočet gradientu v bode gridu X ,
- Zistenie priesečníkov vrstevníc so spádovou krivkou,
- Interpolácia výšky z v bode gridu.



Obr. 1 Funkcia výšky a jej derivácie v smere osi x (y -ový rez) na vybranom bode X gridu



Obr. 2 Funkcia výšky a jej derivácie v smere osi y (x -ový rez) na vybranom bode X gridu

- b) Pri zisťovaní hodnôt a polohy derivácií sme využili deriváciu Lagrangeovho interpolačného polynómu 3. stupňa a Lagrangeovu vetu o strednej hodnote. Na výpočet hodnôt a polohy derivácií sme použili priesečníky A_1-A_4 , B_1-B_4 určené priamkou prechádzajúcou vybraným bodom gridu v smere jednej z osí, čiže v prislúchajúcom reze (obr. 1 a 2).

Hodnota derivácií bola vypočítaná na základe vzťahu pre smernicu dotyčnice:

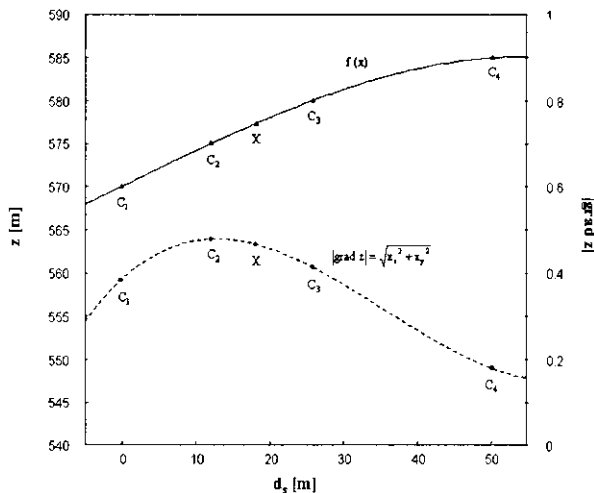
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta z}{l},$$

kde $\operatorname{tg} \alpha$ je smernica dotyčnice k funkcii z , Δz je rozdiel výšok a l vzdialenosť medzi bodmi A_j , A_{j+1} v smere osi x prípadne medzi B_j , B_{j+1} v smere osi y , pričom $j = 1, 2, 3$.

Pri určení polohy derivácií z_x, z_y sme využili geometrickú interpretáciu derivácie ako smernice dotyčnice ku grafu funkcie v nejakom bode A_j' prípadne B_j' , ktorému prislúcha derivácia.

Na určenie polohy derivácií v rezoch je potrebné zistiť buď súradnicu x alebo y v závislosti na konkrétnom reze, keďže k nim patriaca druhá súradnica je konštantná. Súradnicu x resp. y bodu s príslušnou hodnotou derivácie určíme z rovnosti vzťahu pre smernicu dotyčnice v dvojici bodov rezu a deriváciou Lagrangeovho interpolačného polynómu 3. stupňa, vzhľadom na Lagrangeovu vetu o strednej hodnote. Z vlastností Lagrangeovho polynómu vyplýva, že v intervale ohraničenom spomínanou dvojicou bodov sa nachádza iba jeden bod, ktorý vyhovuje riešeniu tejto rovnice.

- c) Takto vzniknutou trojicou bodov s príslušnými hodnotami derivácií preložíme v smere osi x aj y Lagrangeov polynóm 2. stupňa a určíme derivácie z_x, z_y v bode gridu X a z nich následne vypočítame gradient z .
- d, e) Na základe smeru gradientu určíme spádovú krivku a nájdeme štvoricu priesečníkov C_1-C_4 (obr. 3) spádnice s vrstevnicami, ktoré spĺňajú podmienku. Výšku v bode gridu X potom získame interpoláciou Lagrangeovým polynómom 3. stupňa.



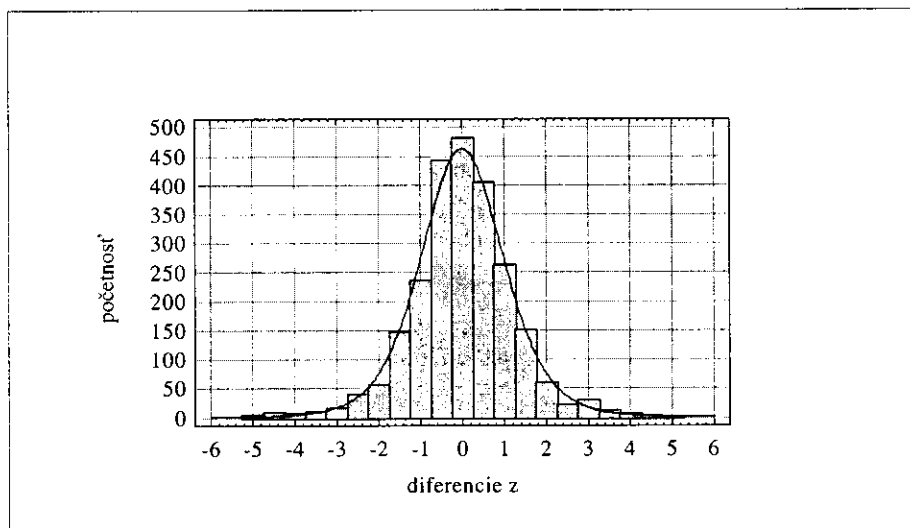
Obr. 3 Funkcia výšky a jej derivácie v smere spádovej krivky prechádzajúcej bodom gridu X

V prípade, že by určované body spádovej krivky boli bodmi lokálnych extrémov, čiže hodnoty im prislúchajúcich parciálnych derivácií boli rovné nule, takže by nebolo možné zistiť smer gradientu, pristúpime k alternatívnemu riešeniu, a to k výpočtu hodnoty nadmorskej výšky v bode X pomocou váženého priemeru zo štyroch najbližších bodov, pričom váhami sú vzdialenosti bodov od X . Vzhľadom na datový typ pre reálne čísla, používaný v programe je výskyt takýchto prípadov pomerne nízky.

Verifikácia výsledkov na etalóne

Verifikáciu programu s implementovanou Lagrangeovou interpolačnou metódou sme realizovali na etalóne, ktorý tvoria hodnoty pôvodného vstupného diskrétného bodového poľa výšok z vektorizovaných vrstevníc. Etalón obsahoval 2 447 bodov z vybraného územia, v ktorých sme interpolovali nadmorské výšky.

Diferencie medzi hodnotami pôvodných a takto získaných výšok sme použili na štatistické vyhodnotenie presnosti interpolácie. Rozsah hodnôt súboru diferencií sa pohyboval od -67,88 m do 83,18 m. Smerodajná odchýlka, ako jedna z mier variability, mala hodnotu 2,94 m, avšak priemer diferencií bol len -0,06 m. Pri štatistickom vyhodnotení diferencií sme vynechali diferencie nepratriace do intervalu $\langle -5,5 \rangle$, pričom z celkového počtu 2 447 bodov sme vylúčili 42. V tomto súbore dosiahol rozptyl hodnotu 1,96 m a priemer -0,05 m. Prehľad o početnostiach diferencií v rôznych intervaloch je možné získať z histogramu diferencií (obr. 4).



Obr. 4 Histogram diferencií výšok na kontrolných bodoch

Diferencie v histograme nemajú normálne rozdelenie, avšak môžeme povedať, že ide o unimodálne mierne asymetrické rozdelenie. Ak chceme vyjadriť predpoklad pre veľkosť a početnosť diferencií, pre iné územie so vstupným bodovým poľom rovnakého pôvodu a za rovnakých podmienok, je potrebné určiť akému teoretickému rozdeleniu sa blíží spomínaný súbor hodnôt.

Na základe analýzy súboru hodnôt diferencií sme zistili, že ho najlepšie vystihuje Studentovo rozdelenie so 7 stupňami voľnosti, čo sme následne overili *Chi-square* testom a K-S testom. Kritické hodnoty teoretického rozdelenia pre príslušné hodnoty α sú uvedené v tab. 1.

Tab. 1 Kritické hodnoty pre Studentovo rozdelenie so 7 stupňami voľnosti

0.01	-2.99796
0.1	-1.41493
0.5	0
0.9	1.41493
0.99	2.99796

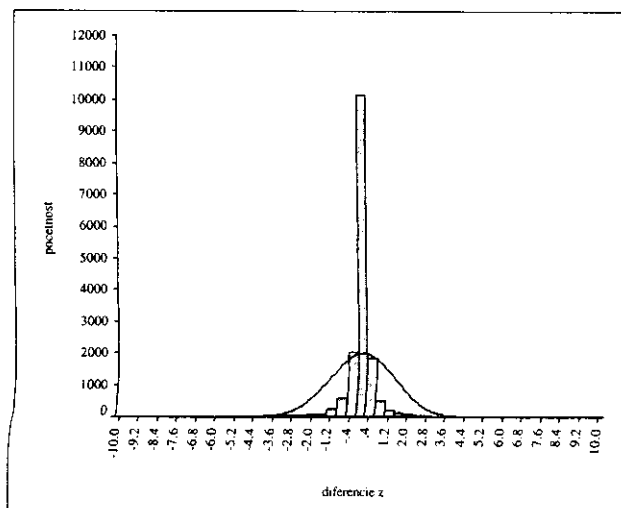
Môžeme teda predpokladať, že hodnoty diferencií voči skutočným hodnotám sa budú s pravdepodobnosťou 99% pohybovať od -2.99796 do 2.99796 m a s pravdepodobnosťou 90% v medziach od -1.41493 do 1.41493 m.

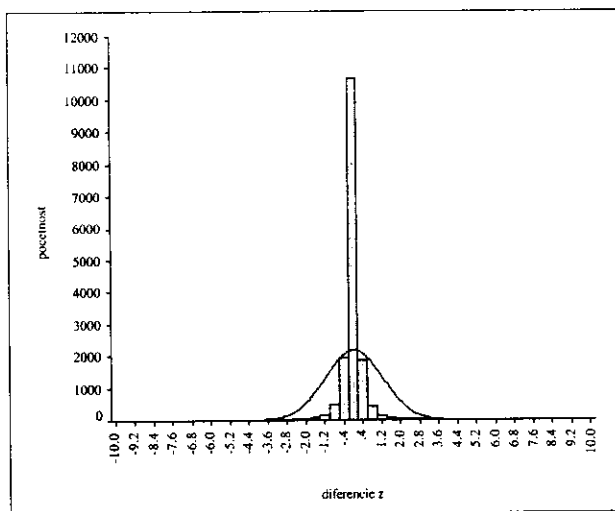
Porovnanie s vybranými funkciami používanými na modelovanie georeliéfu

Na výpočet gridu existuje množstvo interpolačných funkcií implementovaných v rôznych programoch slúžiacich na modelovanie georeliéfu. Z nich sme si na porovnanie s nami navrhnutou implementáciou Lagrangeovho interpolačného polynómu vybrali *Spline tenkej platne s tenziou* v programe GRASS [7], [8] a geoštatistickú interpolačnú metódu *Kriging* (tzv. bodový Kriging [3]) v programe SURFER.

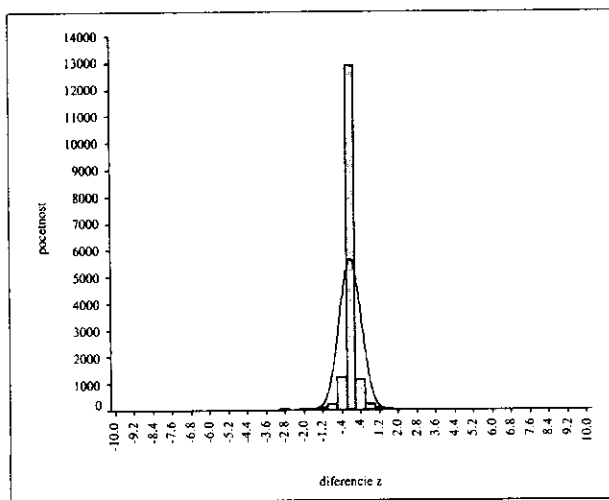
V programe GRASS sme vytvorili grid exportom rastra vytvoreného pomocou modulu *s.surf.rst do site*. Po experimentálnej analýze výstupov tvorených s hodnotami voliteľného parametra $\lambda = 0$ až 90, vzhľadom na čo najlepšiu zhodu s gridmi určenými Lagrangeovou interpolačnou a Kriging metódou zvolili sme hodnotu parametra tenzie ($\lambda = 60$), pričom hodnotu parametra zhladenia sme ponechali na nastavenej hodnote ($s = 0$). Na základe parametrov sa interpolácia pomocou metódy *Spline tenkej platne* dá riadiť v pomerne širokých medziach v závislosti od charakteru modelovaného územia.

Na analyzovanom území s veľkosťou 1000×1600 m sme prostredníctvom spomínaných metód vypočítali grid s veľkosťou 10 m zo vstupného nepravidelného diskrétného bodového poľa výšok získaného vektorizáciou vrstevníc. Vzájomným odčítaním gridov sme získali výškové diferencie, pričom ich veľkosť sa dá analyzovať na základe histogramov (obr. 5 až 7).

**Obr. 5 Histogram diferencií výšok (Lagrange, Kiring)**



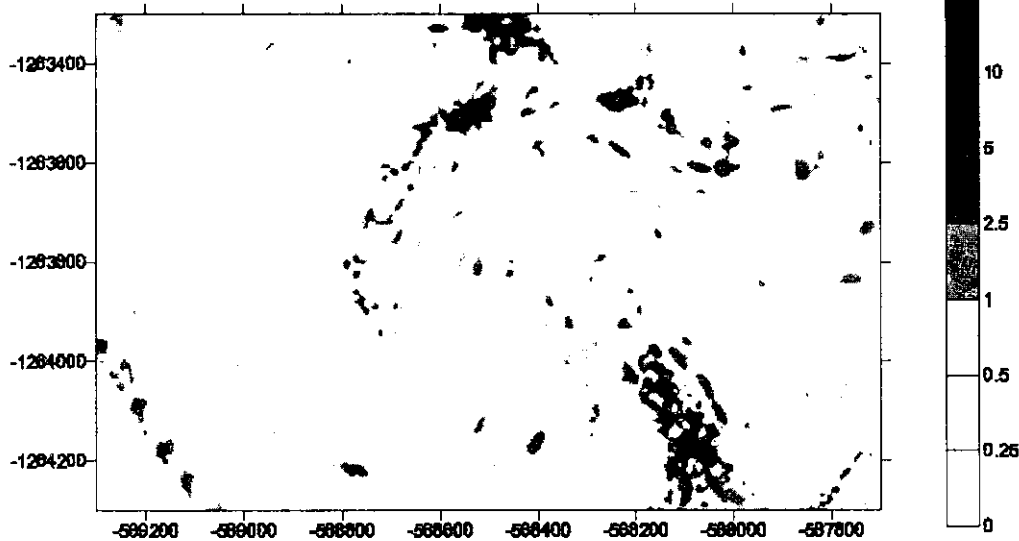
Obr. 6 Histogram diferencií výšok (Lagrange, Spline)



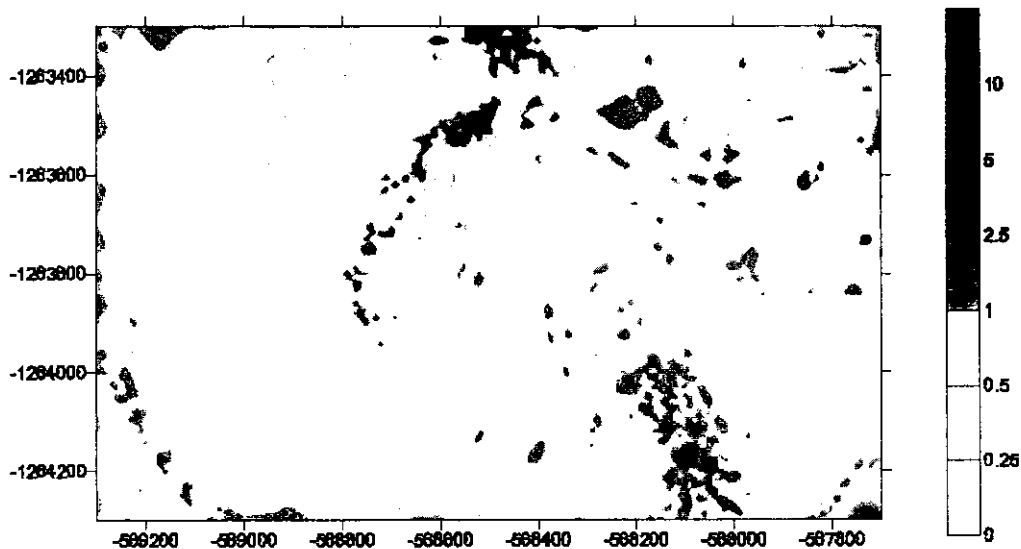
Obr. 7 Histogram diferencií výšok (Kriging, Spline)

Rozdelenie diferencií gridov, interpolovaných Lagrangeovou interpolačnou metódou na jednej a metódou Kriging a Splin na druhej strane, má podobný priebeh, čomu zodpovedajú aj hodnoty rozptylov (1,44 m pre Lagrange, Kriging a 1,69 m pre Lagrange, Spline) a priemerov (-0,03 m pre Lagrange, Kriging a 0,007 m pre Lagrange, Splin). Rozptyl diferencií u gridov získaných metódou Kriging a Splin mal hodnotu 0,21 m a priemer -0,02 m.

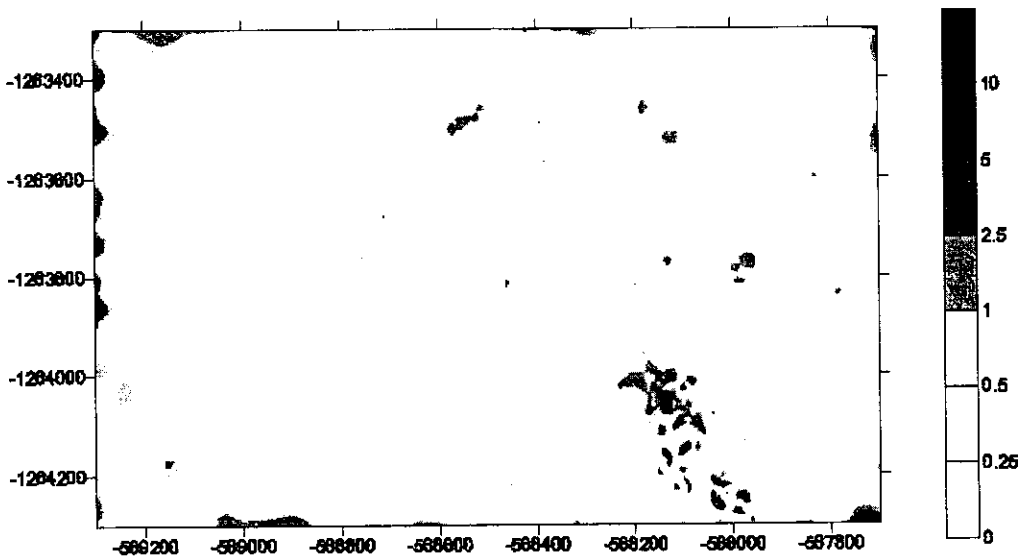
Priestorové rozloženie absolútnych hodnôt diferencií môžeme vyhodnotiť na základe obr. 8 až obr. 10. Areály diferencií výšok jednotlivých porovnávaných gridov majú podobný priebeh a tiahnu sa pozdĺž vodných tokov, ktoré môžeme chápať aj ako určité zlomové línie.



Obr. 8 Priestorové rozloženie diferencií [m] (Lagrange, Kriging)



Obr. 9 Priestorové rozloženie diferencií [m] (Lagrange, Spline)



Obr. 10 Priestorové rozloženie diferencií [m] (Kriging, Spline)

Záver

Overenie výsledkov implementácie Lagrangeovho interpolačného polynómu na množine kontrolných bodov zo súboru vstupného diskrétného bodového poľa výšok umožnilo určiť predpoklady pre veľkosť diferencií voči skutočným hodnotám výšok v stanovených medziach, a to na základe stotožnenia s teoretickým rozdelením (Studentovo rozdelenie so 7 stupňami voľnosti).

Na základe diferencií bola zistená výraznejšia zhoda gridov interpolovaných metódou Spline a Kriging oproti Lagrangeovej metóde, avšak z hľadiska ich priestorového rozloženia diferencií je viditeľná určitá podobnosť.

Literatúra

- [1] BENOVA, A., MORAVČÍK, J. (1999). Vlastnosti interpolačných metód použitých na modelovanie georeliéfu a ich vplyv na výpočet morfolometrických parametrov. *Kartografické listy*, 7, s. 95/108.
- [2] BUCHANAN, J. L., TURNER, P. R. (1995). *Numerical methods and analysis*. McGraw-Hill, Inc. Hightstown USA, 746 s.
- [3] HOMOLA, V. (2002): *Krigování*. <http://homel.vsb.cz/~homso/SLBGEOST/KRG/GSO8.htm>.
- [4] KRCHO, J. (1990). *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu*. VEDA Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 427 s.
- [5] KRCHO, J. (2001). *Modelovanie georeliéfu a jeho geometrickej štruktúry pomocou DTM*. Vydavateľstvo Q111, Bratislava, 336 s.
- [6] MEŇKYOVÁ, L. (2003). *Tvorba a analýza pravidelných a nepravidelných (TIN) sietí ako reprezentácia digitálneho modelu georeliéfu*. Prírodovedecká fakulta Univerzita Komenského, [Diplomová práca], Bratislava, 68 s.
- [7] MIČIETOVÁ, E., MINÁROVÁ, O. (1988). Komplexný digitálny model priestorovej štruktúry a interpolačné metódy. *Geodetický a kartografický obzor*, 7, s. 165/173.
- [8] MITÁŠOVÁ, H., MITÁŠ, L. (1993). Interpolation by Regularized Spline with Tension: Theory and Implementation. *Mathematical Geology*, 25, 6, s. 641/655.
- [9] MITÁŠOVÁ, H., HOFIERKA, J. (1993). Interpolation by Regularized Spline with Tension II: Application to Terrain Modeling and Surface Geometry Analysis. *Mathematical Geology*, 25, 6, s. 657/669.
- [10] TUČEK, J. (1998). *Geografické informačné systémy Princípy a praxe*. Computer Press, Brno, 424 s.

Summary

The algorithm of georelief raster model interpolation using Lagrange polynoms

Interpolation methods form an important factor in georelief modelling and digital models construction. In this article we discuss the proposal of the Lagrange interpolation method algorithm to calculate grid elevation. The algorithm for interpolation of elevation values in grid consists of several parts:

1. Finding of quaternion intersection points of x or y axes with contours, needed for the calculation of partial derivations along the x and y axes. The partial derivations are useful for the calculation of gradient in grid point X .
2. Calculation of values and position (x , y coordinates) of partial derivations z_x, z_y between intersection points along x and y axes, based on Lagrange Mean Value Theorem and geometrical interpretation of derivation.
3. Interpolation of partial derivation z_x, z_y for grid point X and calculation of gradient in the same point, using second degree Lagrange polynom (Fig. 1, 2).
4. Finding of intersection contours with slope curve based on the gradient direction.
5. Interpolation of elevation value in given coordinates of X , using the Lagrange interpolating polynomial of third degree which passes through the slope curve points.(Fig. 3)

Obtained results were verified by comparing to the reference set of irregular discrete input field of points with known elevation values. We can see the frequency distribution of elevation differences (Fig. 4). Theoretical distribution is the most closely approximated by Student's distribution with seven degrees of freedom. Critical values for the distribution are in Tab. 1.

This leads us to an assumption that differences corresponding to another area are going to be distributed similarly as the same critical value range.

Subsequently we have computed the elevation grid representing digital elevation model with regular structure, comparing it with the grids obtained by Spline with tension in GRASS program and point Kriging in SURFER program using elevation differences. The spatial distribution of differences is depicted on Fig. 8 till Fig. 10. The results clearly show that our method is comparable with standard methods used for georelief modelling.

Fig. 1 Function of elevation and partial derivations along the x axis in X point of grid

Fig. 2 Function of elevation and partial derivations along the y axis in X point of grid

Fig. 3 Function of elevation and partial derivations along the slope curve

Fig. 4 Frequency distribution of elevation (check points)

Fig. 5 Frequency distribution of elevation differences (Lagrange, Kriging)

Fig. 6 Frequency distribution of elevation differences (Lagrange, Spline)

Fig. 7 Frequency distribution of elevation differences (Spline, Kriging)

Fig. 8 Spatial distribution of elevation differences [m] (Lagrange, Kriging)

Fig. 9 Spatial distribution of elevation differences [m] (Lagrange, Kriging)

Fig. 10 Spatial distribution of elevation differences [m] (Lagrange, Kriging)

Tab. 1 Critical values for Student's distribution with seven degrees of freedom

Lektoroval:

Mgr. Milan KOREŇ, PhD.,

Východná