Martin VACULA

# URČENIE POLOHY KARTOGRAFICKÉHO PÓLU POMOCOU VEKTOROVÉHO SÚČINU DVOCH VEKTOROV

**Vacula Martin: Definition of Location of the Cartographic Pole Using Vector Multiplication of Two Vectors.** Kartografické listy, 1998, 6, 3 figs., 7 refs.

**Abstract:** One of the main objectives of mathematic cartography is the selection of a most suitable projection for a given region or area. One of the required criteria for selecting the projection is the profile of the area. Profile of the area directly influences selection of the type projection, it`s projection must be frequently in the plane other than normal, and that is directly determined by the position of the cartographic pole.

This article offers a possibility to select the cartographic pole with the help of tools of vectorial algebra as an alternative along with known procedure based on tools of spheric trigonometry.

**Keywords:** Vector, unitary vector.

## Úvod

Zvolenou polohou dotykovej kartografickej rovnobežky je jednoznečne podmienená aj poloha kartografického pólu na referenčnej guľovej ploche. Pri azimutálnom zobrazení volíme polohu kartografického pólu priamo v ťažisku územia vybraného pre zobrazenie. Na rozdiel od azimutálneho zobrazenia určujeme polohu kužeľa a valca z vopred stanovenej podmienky, a to z priebehu dotykovej kartografickej rovnobežky resp. kartografického rovníka cez vybrané územie. Na jednoznačné určenie priebehu dotykovej kartografickej rovnobežky potrebujeme nutne 3 body, ktoré na nej ležia. V zmysle už uvedeného, touto kartografickou rovnobežkou je potom podmienená aj poloha kartografického pólu na referenčnej guľovej ploche. V prípade valcového zobrazenia je jedným z troch určujúcich bodov stred referenčnej gule.

V dostupnej literatúre týkajúcej sa matematickej kartografie je problém určenia kartografického pólu len zriedkavo priamo riešený (Hojovec a kol. 1987, Hojovec 1984, Daniš a Vaľko 1988, Fiala 1955, Kuska 1960). Možnosť určenia kartografického pólu je uvedená napríklad v práci E. Srnku (1977). Vzťahy pre výpočet zemepisných súradníc vychádzajú zo sférickej trigonometrie a majú nasledujúci tvar :

1. Určenie kartografického pólu kužeľového zobrazenia zo známych troch bodov kartografickej rovnobežky:

Mgr. Martin VACULA, Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

$$tg(V_Q - V_1) = \frac{(\sin U_1 - \sin U_3)[\cos U_1 - \cos U_2 \cos(V_2 - V_1)] - (\sin U_1 - \sin U_2)*}{(\sin U_1 - \sin U_3)\cos U_2 \sin(V_2 - V_1) - (\sin U_1 - \sin U_2)*}$$

$$\frac{*[\cos U_1 - co U_3 \cos(V_3 - V_1)]}{*\cos U_3 \cos(V_3 - V_1)}$$

$$tgU_Q = \frac{\cos U_2 \cos(V_Q - V_2) - \cos U_1 \cos(V_Q - V_1)}{\sin U_1 - \sin U_2}.$$

2. Určenie kartografického pólu valcového zobrazenia, zo známych dvoch bodov kartografického rovníka:

$$tgV_Q = \frac{tgU_1 \cos V_2 - tgU_2 \cos V_1}{tgU_2 \sin V_1 - tgU_1 \sin V_2},$$

$$\cot gU_Q = \frac{tgU_1}{\cos(V_1 - V_Q)} = \frac{tgU_2}{\cos(V_2 - V_Q)}.$$

**Určenie polohy kartografického pólu pomocou vektorového súčinu**

Pre zaujímavosť uveďme možnosť určenia kartografického pólu pomocou vektorového súčinu dvoch vektorov bez nutnosti priameho použitia aparátu sférickej trigonometrie. Nasledujúci postup určenia kartografického pólu vektorovým súčinom dvoch vektorov úzko nadväzuje na teóriu odvodenia transformačných rovníc dvoch súradnicových sústav v práci J. Krchu (1986).

Uvažujme o referenčnej guli v kartézskej súradnicovej sústave $\langle O, X, Y, Z \rangle$ ako o guli s jednotkovým polomerom R = 1. Počiatok O súradnicového systému $\langle O.X, Y, Z \rangle$ položme do stredu referenčnej gule, pričom polos +X prechádza bodom $(0^0\ s.š., 0^0\ v.d.\ )$, polos +Y prechádza bodom $(0^0\ s.š., 90^0\ v.d.)$ a polos +Z prechádza severným zemepisným pólom. Ak poznáme 3 body ležiace na jednej dotykovej kartografickej rovnobežke, tieto nám jednoznačne určujú rovinu, ktorej priesečnica s referenčnou guľovou plochou určuje práve dotykovú kartografickú rovnobežku. Úloha nájsť kartografický pól teda spočíva v nájdení jednotkového vektora kolmého na danú rovinu, s počiatkom v bode O súradnicovej sústavy $(O, X, Y, Z)$ a orientovaného do polpriestoru, v ktorom sa nachádzajú dané tri body A ,B, C.

Na základe známych zemepisných súradníc bodov A$(\varphi_A,\lambda_A)$, B$(\varphi_B,\lambda_B)$ a C$(\varphi_C,\lambda_C)$ sú v uvedenej kartézskej súradnej sústave $(O,X,Y,Z)$ zároveň určené neznáme kartézske súradnice týchto bodov, a to všeobecne známymi vzťahmi:

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\varphi * \cos\lambda \ , \\
y &= \cos\varphi * \sin\lambda \ , \\
z &= \sin\varphi \ .
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Danými troma bodmi A, B, C sú určené dva vektory

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathrm{C} - \mathrm{A} = (C_X - A_X, C_Y - A_Y, C_Z - A_Z) = (v_X, v_Y, v_Z) \ , \\
\mathbf{w} &= \mathrm{B} - \mathrm{A} = (B_X - A_X, B_Y - A_Y, B_Z - A_Z) = (w_X, w_Y, w_Z) \ ,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

ktoré ležia v rovine kartografickej rovnobežky.

Vektorovým súčinom vektorov $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ je určený vektor $\mathbf{n}$, kolmý na vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ a tým aj na rovinu určenú bodmi A, B a C:

$$
\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ v_X & v_Y & v_Z \\ w_X & w_Z & w_Z \end{vmatrix} = \qquad (3)
$$

$$
= i(v_Y w_Z - v_Z w_Y) + j(v_Z w_X - v_X w_Z) + k(v_X w_Y - v_Y w_X) = i(n_X) + j(n_Y) + k(n_Z) \ .
$$

Pre vektor $\mathbf{n}$ pritom platí, že jeho veľkosť je rôzna od jednej, t.j. $|n| \neq 1$. Treba uviesť, že pri výpočte vektorového súčinu musíme použiť pravotočivý systém pre vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a $\mathbf{n}$ (v tomto poradí), čo je treba zohľadniť pri určení vektorov $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$. Znamená to, že v rámci "severnej " kartografickej pologule musí vektor $\mathbf{n}$ smerovať von z referenčnej gule v pravotočivom súradnom systéme. Jednotkový vektor $\mathbf{n}^\circ$ vypočítame z vektora $\mathbf{n}$ pomocou vzťahu:

$$
\mathbf{n}^\circ = \frac{n}{|n|} = \left( \frac{n_X}{\sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2}}, \frac{n_Y}{\sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2}}, \frac{n_Z}{\sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2}} \right) = (n_X^0, n_Y^0, n_Z^0) \ , \qquad (4)
$$

ktorého súradnice $n_x^0, n_y^0, n_z^0$ sú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi , t.j.:

$$n_X^0 = \cos\alpha_n = \cos\varphi_Q * \cos\lambda_Q$$
$$n_Y^0 = \cos\beta_n = \cos\varphi_Q * \sin\lambda_Q \qquad (5)$$
$$n_Z^0 = \cos\gamma_n = \sin\varphi_Q$$

takže

$$\sqrt{n_x^{0\,2} + n_y^{0\,2} + n_z^{0\,2}} = 1 \ .$$

Z uvedených vzťahov plynie, že koncovým bodom jednotkového vektora $\mathbf{n}^\circ$ je na referenčnej guľovej ploche jednoznačne určená poloha kartografického pólu Q.

Pre zemepisné súradnice $\varphi_Q, \lambda_Q$ kartografického pólu Q potom platí:

$$\varphi_Q = \arcsin\left(n_Z^0\right), \qquad (6)$$

$$\lambda_Q = arctg\left(\frac{n_Y^0}{n_X^0}\right), \text{ resp. } \lambda_Q = \arcsin\left(\frac{n_Y^0}{\cos\varphi_Q}\right).$$

Zemepisná šírka $\varphi_Q$ je vo vzťahu (6) určená jednoznačne, správne zaradenie zemepisnej dĺžky $\lambda_Q$ do intervalov (0°v.d.,90°v.d.), (90°v.d.,180°v.d), (0°z.d.,180°z.d.) a (90° z.d.,180°z.d.) umožňujú rovnice (5), kde $\cos\varphi_Q$ je vždy kladné a kombinácia znamienok pre $\cos\lambda_Q$ a $\sin\lambda_Q$ jednoznačne určuje interval, v ktorom sa nachádza zemepisná dĺžka $\lambda_Q$.

V prípade valcového zobrazenia sa dotyková rovnobežka stáva hlavnou kružnicou, ktorej stred je totožný so stredom referenčnej guľovej plochy. Postačujúcou podmienkou na určenie jej priebehu je preto stanovenie dvoch bodov na hlavnej kružnici, zatiaľ čo tretí bod je totožný so stredom referenčnej guľovej plochy.

Aplikácia uvedeného postupu na určenie kartografického pólu z dvoch známych bodov A, B kartografického rovníka je teda podobná, ale jednoduchšia je v tom, že nemusíme vykonať výpočet vektorov $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ rozdielom súradníc bodov, pretože súradnice vektorov $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ vypočítame ako kartézske súradnice bodov A, B.

Overovací výpočet polohy kartografického pólu kužeľového konformného zobrazenia v šikmej polohe bol podľa uvedeného postupu vykonaný pre územie Slovenskej republiky. Výpočet bol uskutočnený jednak pre kužeľové konformné zobrazenie na dotykový kužeľ v šikmej polohe s dotykovou rovnobežkou prebiehajúcou približne stredom Slovenskej republiky a jednak pre sečný kužeľ v šikmej polohe tak, aby pre obe zobrazenia bol kartografický pól totožný.

Ťažisko je však v práci položené na konformné kužeľové zobrazenie na dotykový kužeľ s čo najvhodnejšie volenou dotykovou rovnobežkou určenou troma bodmi. Zobrazenie na sečný kužeľ je predbežne uvedené iba rámcovo pre základné vzájomné porovnanie priebehu hodnôt dĺžkového skreslenia. Priebeh dotykovej kartografickej rovnobežky bol pre zobrazované územie SR volený tak, aby dotyková kartografická rovnobežka čo najlepšie delila toto územie na dve rovnaké časti a zároveň, aby modul dĺžkového skreslenia v okrajových kartografických rovnobežkách, dotýkajúcich sa hraníc SR, nadobúdal približne rovnaké hodnoty.

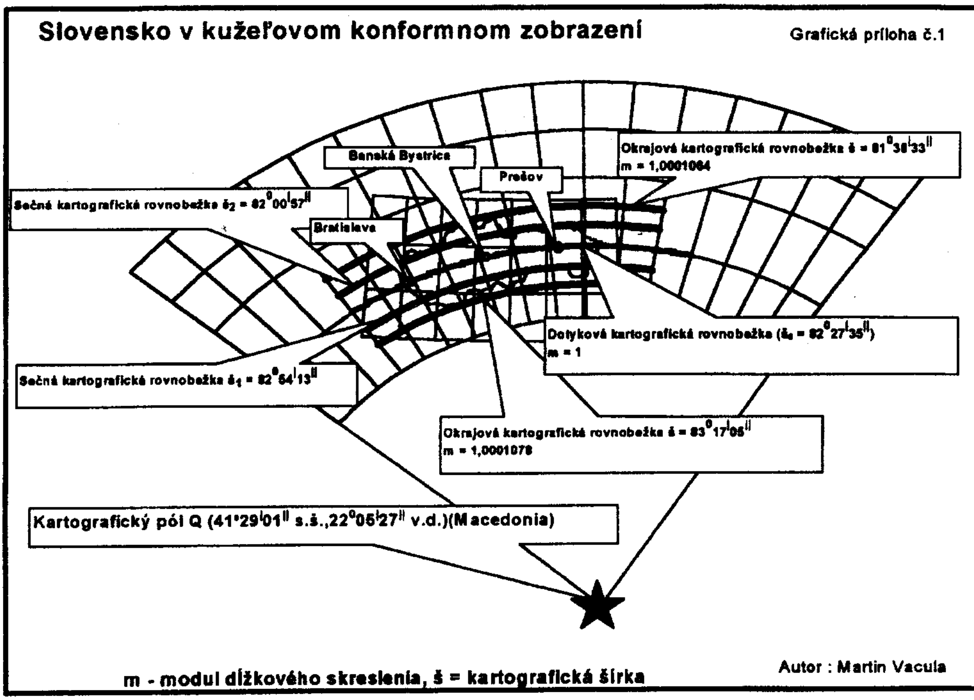
Ako tri určujúce body dotykovej kartografickej rovnobežky boli použité tri mestá: Bratislava (48°09′33″s.š., 17°08′06″v.d.), Banská Bystrica (48°43′55″s.š., 19°08′13″v.d.) a Prešov (49°s.š., 21°13′58″v.d.). Výsledkom tohto riešenia je kartografický pól Q (41° 29′01″s.š., 22°05′27″v.d.).

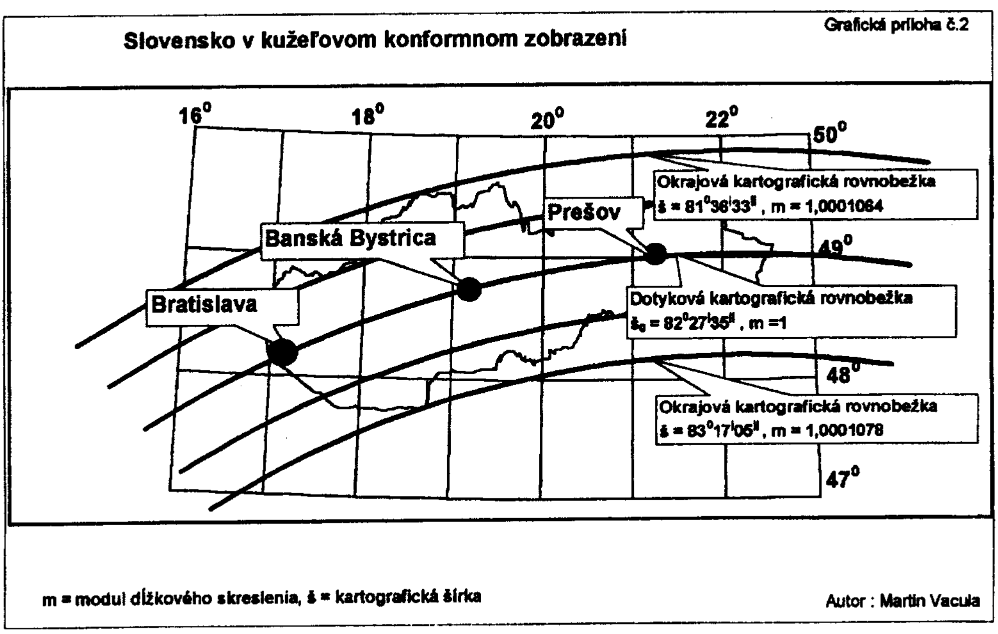
Na grafickej prílohe č. 1 sa uvádza ukážka riešenia kartografického pólu pre územie Slovenskej republiky.

Kartografický pól je na prílohe č. 1 z úsporných priestorových dôvodov čiastočne posunutý, takže kartografická sieť je v okrajových častiach čiastočne deformovaná. V dôsledku toho na grafickej prílohe nezvierajú kartografické poludníky a rovnobežky pravý uhol. Na tejto prílohe je zároveň zvýraznený jednak priebeh dotykovej kartografickej rovnobežky spolu s okrajovými rovnobežkami a jednak je na nej pre úsporu miesta zároveň zobrazený aj priebeh sečných kartografických rovnobežiek. Sečné kartografické rovnobežky sú situované medzi dotykovou kartografickou rovnobežkou a okrajovými rovnobežkami.

V grafickej prílohe č. 2 je zobrazené samotné územie SR so zemepisnou sieťou a so zvýraznenými kartografickými rovnobežkami – s dotykovou a dvoma okrajovými kartografickými rovnobežkami. K okrajovým kartografickým rovnobežkám sú uvedené aj hodnoty dĺžkového skreslenia (vo všetkých smeroch, keďže ide o konformné zobrazenie). Podrobné riešenie tohto zobrazenia by mohlo byť námetom ďalšej práce. Naznačená poloha kužeľa je len predbežným návrhom.

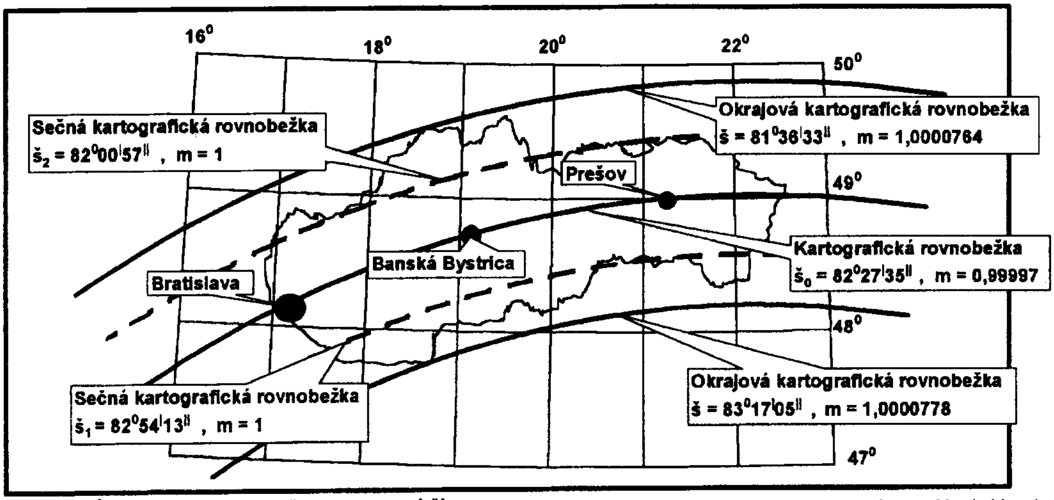
Na prílohe č. 3 je uvedené zobrazenie SR na sečný kužel, ktorý dosahuje lepšie hodnoty dĺžkového skreslenia v jeho okrajových častiach. Sečné kartografické rovnobežky sú na tejto prílohe zobrazené zvýraznenými prerušovanými čiarami.


Slovensko v kužeľovom konformnom zobrazení
Grafická príloha č.1
Banská Bystrica
Okrajová kartografická rovnobežka š = 81°38'33''
m = 1,0001084
Prešov
Sečná kartografická rovnobežka š2 = 82°00'57''
Bratislava
Dotyková kartografická rovnobežka (š0 = 82°27'35'')
m = 1
Sečná kartografická rovnobežka š1 = 82°54'13''
Okrajová kartografická rovnobežka š = 83°17'05''
m = 1,0001078
Kartografický pól Q (41°29'01'' s.š.,22°05'27'' v.d.)(Macedonia)
m - modul dĺžkového skreslenia, š = kartografická šírka
Autor : Martin Vacula


Slovensko v kužeľovom konformnom zobrazení
Grafická príloha č.2
16°
18°
20°
22°
50°
Okrajová kartografická rovnobežka
š = 81°38'33'', m = 1,0001084
Prešov
Banská Bystrica
49°
Bratislava
Dotyková kartografická rovnobežka
š0 = 82°27'35'', m =1
48°
Okrajová kartografická rovnobežka
š = 83°17'05'', m = 1,0001078
47°
m = modul dĺžkového skreslenia, š = kartografická šírka
Autor : Martin Vacula

**Slovensko v kužeľovom konformnom zobrazení na sečný kužeľ (koeficient zmenšenia = 0,99997)**

Grafická príloha č.3




m - modul dĺžkového skreslenia , š - karografická šírka

Autor : Martin Vacula

## Záver

Naznačený postup je jednou z možností ako určiť kartografický pól zo známych súradníc troch bodov kartografickej rovnobežky. Každý z postupov má svoje výhody i nevýhody. Uvedený postup kompenzuje istú zdĺhavosť možnosťou priebežného kontrolovania čiastkových výsledkov, čo umožňuje predchádzať chybám pri výpočte.

Najväčšou výhodou sa však javí jednoznačnosť určenia zemepisných súradníc $\varphi_Q, \lambda_Q$ kartografického pólu Q.

## Literatúra


Hojovec, V. a kol.: Kartografie, Praha, GKP 1987.
Hojovec, V.: Matematická kartografie, Praha, ČVUT 1984.
Srnka, E.: Matematická kartografie, Brno, VAAZ 1977.
Daniš, M. - Vaľko, J.: Matematická kartografia (praktické úlohy, tabuľky), Bratislava, SVŠT 1988.
Fiala, F.: Matematická kartografie, Praha, ČSAV 1955.
Kuska, F.: Matematická kartografia, Bratislava, SNTL 1960.
Krcho, J.: Geografická kartografia I, Bratislava, UK 1986.

## Summary

### Definition of location of the cartographic pole using vector multiplication of two vectors

From the available literature dealing with mathematic cartography are quoted relations for calculations of the position of cartographic pole. These relations are based on tools of spheric trigonometry.

Methodology presented in the article offers solutions based on knowledge of vector algebra. Both methods have merits and demerits. Merit of the method as mentioned in the article is the implementation of inclusion of geographic longitude of cartographic pole in correct interval, which is in relation to spherical trigonometry which is a little bit problematic as regards to the period of **tg** function.

***Lektoroval:***
***Prof. RNDr. J. Krcho, DrSc.,***
***Prírodovedecká fakulta UK,***
***Bratislava***