

† Zdenek SCHNEIDER, Gabriela KÁLNOVÁ

LOKÁLNE PROJEKTÍVNE TRANSFORMÁCIE V TVORBE DIGITÁLNEHO MODELU ÚZEMIA

Schneider Zdenek, Kálnová Gabriela: Local Projective Transformations in Creation of Digital Territory Model. Kartografické listy, 1998, 6, 3 figs., 2 tabs., 2 refs.

Abstract: We present two computational methods of the projective transformation relations between the two systems of points using the system of linear equations and using the least squares method. The method based on a solution of linear equations allow us to repeat the transformation on that part of a map where larger deviations occur. The second transformation gives already more precise coordinations of point systems in the chosen model map.

Keywords: Projective transformation, linear systems, least squares method, Newton method.

Úvod

Pri spracovávaní sústav bodov sa kartografi často stretávajú so situáciou, kedy je potrebné, aby body jednej sústavy boli totožné s niektorými bodmi inej sústavy. Takýmito bodmi sú napríklad rohy dvoch mapových listov, ktoré sú identicky k sebe priradené, alebo body viacerých snímok, z ktorých je potrebné vytvoriť jednu ucelenú snímku. Na stotožnenie bodov jednej sústavy s bodmi druhej sústavy sa dajú použiť rôzne druhy transformácií.

Tento príspevok sa zaoberá aplikáciou projektívnej transformácie na riešenie spomínaného problému.

Projektívna transformácia

Uvažujme o rovine s kartézskym súradnicovým systémom. Potom každému bodu tejto roviny vieme jednoznačne priradiť usporiadanú dvojicu reálnych čísel (súradnice bodu) a naopak každej usporiadanej dvojici reálnych čísel (súradniciam bodu) vieme jednoznačne priradiť bod v rovine:

$$A \leftrightarrow x_A, y_A \quad \text{alebo} \quad A = [x_A, y_A].$$

Predpokladajme teraz, že tento bod má dva druhy súradníc: nečiarkované x, y (v starej súradnicovej sústave) a čiarkované x', y' (v novej súradnicovej sústave). Nech sú dané čísla $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbf{R}$. Potom sa transformácia P , ktorá bod A zobrazí na bod A'

† RNDr. Zdenek SCHNEIDER, CSc., RNDr. Gabriela KÁLNOVÁ, Stavebná fakulta STU, Radlinského 11, 813 68 Bratislava. E-mail: kalnova@vox.svf.stuba.sk

$$\mathbf{P}: A \rightarrow A' \quad \text{alebo} \quad \mathbf{P}(A) = A'$$

nazýva projektívna transformácia, ak pre súradnice x, y a x', y' platia vzťahy

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + 1}, \quad y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + 1}, \quad (1)$$

kde konštanty $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbf{R}$ spĺňajú nerovnosť

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Projektívna transformácia zobrazí bod do bodu, priamku do priamky, dotyčnicu do dotyčnice. Výnimku tvoria body, ktorých súradnice vyhovujú rovnici $gx + hy + 1 = 0$. Okrem toho projektívna transformácia zachováva dvojpomer štyroch bodov na priamke. Nech body $A, B, C, D \in p$ a im zodpovedajúce body $A', B', C', D' \in p'$. Označme XY vzdialenosť bodov X, Y a ďalej označme (AB, CD) pomer vzdialeností $(CA/CB)/(DA/DB)$. Potom platí $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

Ak chceme určiť vzťahy (1) projektívnej transformácie, musíme nájsť osem parametrov a, b, c, d, e, f, g, h . Na ich jednoznačné určenie musia byť známe minimálne štyri body s oboma súradnicami.

Projekcia cez štyri body mapového listu

Predpokladajme, že máme určené štyri body (pravdepodobne rohy mapového listu) $A_i = [x_i, y_i]$, $i = 1, 2, 3, 4$ a vieme, že v novej súradnicovej sústave by mali mať súradnice $[x'_i, y'_i]$. Pokúsime sa určiť projektívne zobrazenie s vlastnosťou $\mathbf{P}(A_i) = A'_i$ pre $i = 1, 2, 3, 4$. Táto úloha vedie na riešenie sústavy ôsmich lineárnych rovníc s ôsmimi neznámymi

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{p}, \quad (2)$$

kde \mathbf{v} a \mathbf{p} sú vektory

$$\mathbf{v}^T = (a, b, c, d, e, f, g, h),$$

$$\mathbf{p}^T = (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, x'_3, y'_3, x'_4, y'_4)$$

a \mathbf{M} je matica

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1x_1 & -x'_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -y'_1x_1 & -y'_1y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_2x_2 & -x'_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -y'_2x_2 & -y'_2y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_3x_3 & -x'_3y_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -y'_3x_3 & -y'_3y_3 \\ x_4 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_4x_4 & -x'_4y_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -y'_4x_4 & -y'_4y_4 \end{pmatrix}$$

Zostáva zodpovedať otázku, či systém (2) má práve jedno riešenie, má nekonečne veľa riešení, alebo nemá riešenie. Dôležitú úlohu tu má determinant matice \mathbf{M} . Jeho analytické vyjadrenie je však veľmi zložité, nakoľko matica \mathbf{M} obsahuje šestnásť premenných (staré a nové súradnice bodov). V ďalšom budeme teda predpokladať, že body sú zvolené tak, že sústava má práve jedno riešenie.

Projekcia cez štyri a viac bodov mapového listu

Z praxe je známe, že na určenie transformačných vzťahov medzi dvoma súradnicovými systémami sa môže podieľať viac bodov. V takom prípade použijeme metódu najmenších štvorcov. Budeme sa teda venovať riešeniu nasledujúcej úlohy: pre dve dané sústavy bodov $A_i = [x_i, y_i]$, $A'_i = [x'_i, y'_i]$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 4$ treba nájsť projektívnu transformáciu danú vzťahmi (1) tak, aby súčet štvorcov vzdialeností bodov A'_i a $\mathbf{P}(A_i)$ bol minimálny, t.j. aby

$$q = q(a, b, c, d, e, f, g, h) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{ax + by + c}{gx + hy + 1} - x' \right)^2 + \left(\frac{dx + ey + f}{gx + hy + 1} - y' \right)^2 \right] = \min.$$

Funkcia q nadobúda minimum v osmici a, b, c, d, e, f, g, h , ktorá je riešením sústavy ôsmich rovníc v tvare parciálnych derivácií funkcie q podľa jednotlivých premenných s pravými stranami rovnými nule, t.j.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(a, b, c, d, e, f, g, h) = (q_a, q_b, q_c, q_d, q_e, q_f, q_g)^T = (0, \dots, 0)^T. \quad (3)$$

V sústave (3) je šesť lineárnych rovníc q_a, q_b, q_c, q_d, q_e a dve rovnice q_f, q_g nelineárne. Na riešenie tejto sústavy použijeme Newtonovu metódu.

Nech $(a, b, c, d, e, f, g, h)_0$ je počiatočný odhad riešenia. Miesto nelineárnej sústavy (3) budeme riešiť lineárnu sústavu

$$\mathbf{Q}' \cdot \Delta = -\mathbf{Q}. \quad (4)$$

Pod \mathbf{Q}' rozumieme Jacobiho maticu pre funkcie $q_a, q_b, q_c, q_d, q_e, q_f, q_g$, z ktorých každá má spojité parciálne derivácie podľa a, b, c, d, e, f, g, h .

Označme

$$\begin{aligned} r_i &= (ax_i + by_i + c) - x'_i(gx_i + hy_i + 1) \\ s_i &= (dx_i + ey_i + f) - y'_i(gx_i + hy_i + 1) \\ t_i &= (ax_i + by_i + c)r_i - (dx_i + ey_i + f)s_i \\ u_i &= x'_i(gx_i + hy_i + 1) - 2(ax_i + by_i + c) \\ v_i &= y'_i(gx_i + hy_i + 1) - 2(dx_i + ey_i + f) \\ w_i &= x'_i(ax_i + by_i + c) + y'_i(dx_i + ey_i + f) \end{aligned}$$

pre $i = 1, \dots, n$.

Potom

$$\mathbf{Q}' = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i & 0 & 0 & 0 & -x'_i x_i^2 & -x'_i x_i y_i \\ x_i y_i & y_i^2 & y_i & 0 & 0 & 0 & -x'_i x_i y_i & -x'_i y_i^2 \\ x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_i x_i & -x'_i y_i \\ 0 & 0 & 0 & x_i^2 & x_i y_i & x_i & -y'_i x_i^2 & -y'_i x_i y_i \\ 0 & 0 & 0 & x_i y_i & y_i^2 & y_i & -y'_i x_i y_i & -y'_i y_i^2 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 & -y'_i x_i & -y'_i y_i \\ x_i^2 u_i & x_i y_i u_i & x_i u_i & x_i^2 v_i & x_i y_i v_i & x_i v_i & x_i^2 w_i & x_i y_i w_i \\ x_i y_i u_i & y_i^2 u_i & y_i u_i & x_i y_i v_i & y_i^2 v_i & y_i v_i & x_i y_i w_i & y_i^2 w_i \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n (x_i r_i, y_i r_i, r_i, x_i s_i, y_i s_i, s_i, -x_i t_i, -y_i t_i).$$

Ak má Q' nenulový determinant, tak (4) má práve jedno riešenie Δ . Novú aproximáciu presného riešenia

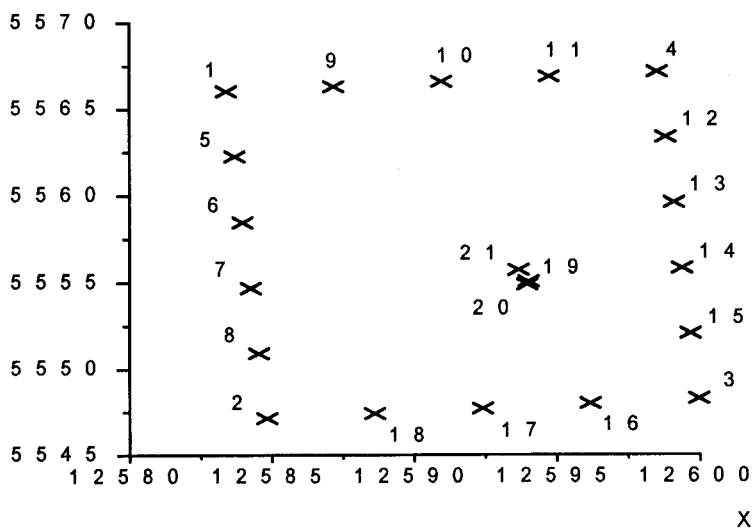
$$(a, b, c, d, e, f, g, h)_1 = (a, b, c, d, e, f, g, h)_0 + \Delta$$

dosadíme do Q a Q' a zo (4) vypočítame ďalšie spresnenie Δ . Konvergencia Newtonovej metódy je zaručená nenulovým determinantom matice Q' .

Numerický experiment

Projektívnu transformáciu (jej štvorbodovú i viacbodovú verziu) sme overili na praktickom príklade.

K dispozícii sme mali súradnice bodov mapy katastrálneho územia Modra s označením Z. S. XVII – 20 – de v mierke 1:2880, jej matematické a transformované súradnice. Mapový list bol mapovaný v r. 1894 v stereografickej projekcii. Na prevod súradníc rohov mapového listu boli vypočítané afinné transformačné kľúče, pričom stredná kvadratická chyba nepresahuje 0,10 m. Pod pojmom transformované súradnice rozumieme súradnice, ktoré vznikli transformáciou relatívnych súradníc z mapy v mierke 1:2880 do systému JTSK. Rohy mapového listu (body 1 až 4) a body päťpalcovej siete na ráme mapového listu (5 až 18) boli získané Geoscanom (tab. 1). Zvyšné body sú súradnice rohov kostola (19 a 21) a domu (20) z vnútra mapového listu získané transformáciou. Za ich matematické, resp. absolútne súradnice považujeme vypočítané hodnoty pri novom mapovaní ZMVM v r. 1988.



Obr. 1 Usporiadanie bodov na mapovom liste

Relatívne (yr, xr), matematické (ym, xm) i transformované (yt, xt) súradnice bodov sú uvedené v tab. 1:

Tab. 1 Tabuľka súradníc

č.b.	yr	xr	ym	xm	yt	xt	ym-yr	xm-xr
1	2005.00	108.36	556602.83	1258339.13	556602.77	1258339.29	0.06	-0.16
2	115.12	114.94	554712.18	1258482.70	554712.35	1258482.77	-0.17	-0.07
3	120.24	1626.81	554827.06	1259995.21	554826.88	1259995.02	0.18	0.19
4	2011.41	1620.23	556717.72	1259851.64	556717.61	1259851.61	0.11	0.03
5	1627.54	109.45	556224.70	1258367.84	556224.76	1258367.48	-0.06	0.36
6	1249.34	110.92	555846.57	1258396.56	555846.25	1258396.21	0.32	0.35
7	871.33	112.38	555468.44	1258425.27	555468.14	1258425.05	0.30	0.22
8	493.32	113.48	555090.31	1258453.99	555090.22	1258453.66	0.09	0.33
9	2006.65	486.55	556631.55	1258717.26	556631.65	1258717.25	-0.10	0.01
10	2008.11	864.57	556660.28	1259095.38	556660.27	1259095.26	0.01	0.12
11	2009.58	1242.58	556689.00	1259473.51	556688.80	1259473.52	0.20	-0.01
12	1633.76	1622.05	556339.59	1259880.35	556339.66	1259880.51	-0.07	-0.16
13	1255.93	1623.70	555961.46	1259909.07	555961.73	1259909.36	-0.27	-0.29
14	877.73	1625.16	555583.32	1259937.78	555583.63	1259938.19	-0.31	-0.41
15	498.99	1626.26	555205.19	1259966.50	555205.17	1259966.82	0.02	-0.32
16	118.96	1249.34	554798.34	1259617.08	554798.40	1259617.11	-0.06	-0.03
17	117.50	871.51	554769.62	1259238.96	554769.63	1259239.08	-0.01	-0.12
18	116.04	492.95	554740.90	1258860.83	554740.73	1258860.55	0.17	0.28
19	839.69	1085.85	555505.72	1259400.67	555506.85	1259400.91	-1.13	-0.24
20	823.23	1080.18	555489.20	1259396.42	555489.98	1259396.43	-0.78	-0.01
21	909.01	1054.94	555572.59	1259365.49	555573.93	1259364.95	-1.34	0.54

Cieľom nášho experimentu bolo vypočítať projektívne transformačné vzťahy (1) medzi relatívnymi a matematickými súradnicami a transformovať relatívne súradnice. Na výpočet koeficientov a, b, c, d, e, f, g, h vzťahu (1) sme použili

- a) vzťah (2) a súradnice štyroch bodov 1, 2, 3, 4,
- b) vzťah (4) a súradnice štyroch bodov 1, 2, 3, 4,
- c) vzťah (4) a súradnice ôsmich bodov 1, 7, 2, 17, 3, 14, 4, 10.

Body z príkladu c) boli použité aj pri transformácii pomocou Geoscanu (yt, xt). Odchýlky medzi získanými a matematickými súradnicami sú v tab. 2.

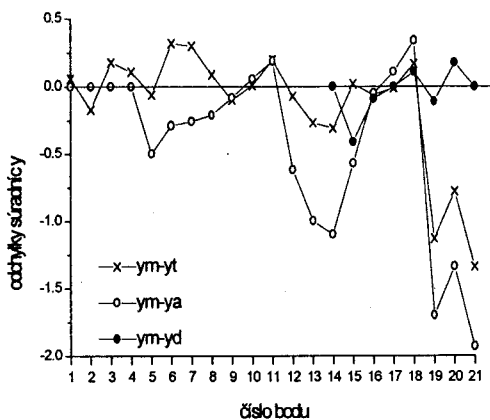
V stĺpcoch odchýliek $ym-yr$ a $xm-xr$ môžeme pozorovať presnosť, s akou boli transformované súradnice bodov 1, 2, 3, 4 rohov mapového listu. Túto vlastnosť transformačných vzťahov (1) získaných riešením sústavy (2) sme využili na spresnenie súradníc bodov z vnútra mapového listu (19 - 21). Urobili sme ďalšiu projektívnu transformáciu na časti mapy, ktorej rohy tvoria body 3, 17, 21 a 14, t.j. použili sme

- d) vzťah (2) a súradnice štyroch bodov 3, 17, 21 a 14.

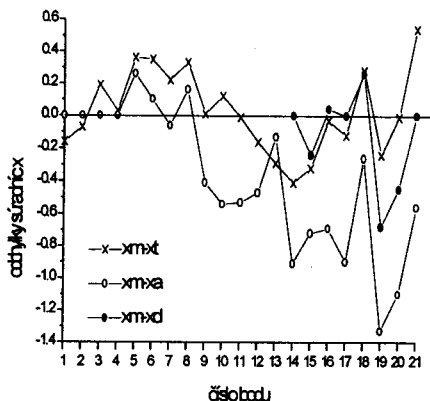
Tab. 2 Výsledky projektívnej transformácie

č.b.	Ym-yt	xm-xt	ym-ya	xm-xa	ym-yb	xm-xb	ym-yc	xm-xc	ym-yd	xm-xd
1	0.06	-0.16	0.00	0.00	0.73	0.46	0.76	0.43		
2	-0.17	-0.07	0.00	0.00	-0.73	-0.46	-0.98	-0.36		
3	0.18	0.19	0.00	0.00	0.73	0.46	0.91	0.82		
4	0.11	0.03	0.00	0.00	-0.73	-0.46	-0.80	-0.31		
5	-0.06	0.36	-0.50	0.26	0.35	0.50	0.35	0.50		
6	0.32	0.35	-0.29	0.10	0.47	0.14	0.43	0.16		
7	0.30	0.22	-0.26	-0.06	0.20	-0.19	0.11	-0.15		
8	0.09	0.33	-0.21	0.16	-0.25	-0.14	-0.41	-0.07		
9	-0.10	0.01	-0.08	-0.41	0.32	0.24	0.33	0.33		
10	0.01	0.12	0.06	-0.54	0.10	0.01	0.09	0.18		
11	0.20	-0.01	0.19	-0.53	-0.14	-0.34	-0.18	-0.16		
12	-0.07	-0.16	-0.62	-0.47	-0.65	-0.77	-0.64	-0.58		
13	-0.27	-0.29	-1.00	-0.13	-0.54	-0.27	-0.46	-0.04		
14	-0.31	-0.41	-1.10	-0.91	-0.34	-0.87	-0.22	-0.59	0.00	0.00
15	0.02	-0.32	-0.57	-0.72	0.27	-0.48	0.43	-0.16	-0.41	-0.24
16	-0.06	-0.03	-0.05	-0.69	0.35	-0.05	0.43	0.33	-0.09	0.04
17	-0.01	-0.12	0.11	-0.90	0.16	-0.35	0.13	-0.01	0.00	0.00
18	0.17	0.28	0.34	-0.26	0.01	-0.07	-0.13	0.17	0.11	0.26
19	-1.13	-0.24	-1.70	-1.33	-1.01	-0.83	-0.95	-0.54	-0.11	-0.68
20	-0.78	-0.01	-1.34	-1.10	-0.66	-0.60	-0.60	-0.31	0.18	-0.45
21	-1.34	0.54	-1.93	-0.56	-1.24	-0.07	-1.19	0.21	0.00	0.00

Grafy odchýliek súradníc



Obr. 2



Obr. 3

Záver

Prezentovali sme dva spôsoby výpočtu projektívnych transformačných vzťahov medzi dvoma sústavami bodov: jeden pomocou sústavy lineárnych rovníc a súradníc rohov mapového listu a druhý pomocou metódy najmenších štvorcov. Obidva spôsoby dávajú výsledky porovnateľné s výsledkami komerčného produktu (Geoscan). Projektívne vzťahy vypočítané zo sústavy lineárnych rovníc transformujú body tak, že je možné identifikovať oblasť s veľkými odchýlkami od matematických súradníc. Túto oblasť môžeme transformovať pomocou nových projektívnych vzťahov vypočítaných z novej sústavy lineárnych rovníc. Výsledné súradnice bodov už vykazujú menšie odchýlky od matematických súradníc.

Podakovanie: Ďakujem doc. Ing. Milanovi Hájkovi, CSc. za cenné odborné rady a Ing. Milošovi Jackovi za dodanie súradníc bodov modelovej mapy.

Literatúra

MEDEK, V., ZÁMOŽÍK, J.: *Konstruktívna geometria pre technikov*, Bratislava 1978.
RALSTON, A.: *Základy numerické matematiky*, Praha, Academia 1973.

S u m m a r y

Local projective transformation in creation of digital territory model

A calculation of the projected transformation relations between the two systems of points is quite interesting problem from a mathematician point of view. We present two methods of its solution: a) using a system of linear equations and coordinations of four points (most frequently the corners of a map), b) using classical least squares method.

Both methods give results which are comparable with results from the commercial products (Geoscan). The projective relations transform the points such that it is possible to identify a part of map with large deviations from the mathematical coordinats. This part can be transformed using a next projective relations computed from the new system of linear equations. Resulting coordinations of the points have already small deviations from the mathematical coordinations.

Lektoroval:

Ing. Š. Špaček,

Geodetický a kartografický ústav,

Bratislava