

Ján VALKO

APLIKÁCIA PRESNEJ MATEMATICKEJ METÓDY TRANSFORMÁCIÍ V KARTOGRAFII

Valko, Ján: Application of exact mathematical method of the transformation in cartography. Kartografické listy, 1993, 1, 4 figs., 5 refs.

Abstract: Mathematical transformation of cartographic grid and map contents is discussed. The method using computer and computer graphics is applied to new small scale map composition.

Key words: Mathematical transformation, cartographic grid.

Úvod

Cieľom práce je ukázať možnosti využitia výpočtovej a zobrazovacej techniky - počítačovej grafiky pri transformáciách jednak matematického základu, ako aj obsahu mapy pri tvorbe novej mapy. Práca sa zaoberá transformačnými metódami pri tvorbe nových máp malých mierok. Doteraz známe transformačné metódy, akými sú grafická, mechanická, graficko-mechanická, fotomechanická a ďalšie sú prudkým nástupom počítačovej grafiky postupne vytlačované novými matematickými metódami. Tieto metódy umožňujú automatizovať postupný proces od výpočtu matematického základu mapy cez výpočet a vyjadrenie obsahu mapy v číselnej forme spolu s programom pre kresbu na počítači až po vykreslenie na automatickom koordinátografe. Matematické metódy umožňujú zároveň transformovať súradnice medzi geodetickými súradnicami rôznych kartografických zobrazení. Táto vlastnosť uvedených metód sa využíva pri tvorbe nových máp malých mierok, ak podkladová mapa je v inom kartografickom zobrazení ako je navrhované zobrazenie novo zostavovanej mapy.

K matematickým transformačným metódam môžeme zaradiť:

- a) presné,
- b) aproximačné,
- c) interpolačné lineárneho tvaru,
- d) vyrovnávacie,
- e) iteračné a interpolačné vyšších rádov,
- f) Lagrangeove a pomocou spline funkcií a i.

Matematické metódy transformácií

Presná matematická metóda

Základnou podmienkou použitia tejto metódy je poznať obe kartografické zobrazenia, t.j. mapy podkladovej a mapy zostavovanej. To znamená, že musíme poznať zobrazovacie rovnice oboch kartografických zobrazení. Pre zobrazenie referenčnej gule do roviny na podkladovej mape platia tieto vzťahy:

$$X = f_1(U, V); \quad Y = f_2(U, V) \quad /1/$$

Pre inverzný tvar rovníc /1/ platí:

$$U = g_1(X, Y); \quad V = g_2(X, Y) \quad /2/$$

Pre kartografické zobrazenie odvodenej mapy platí:

$$X = h_1(U, V); \quad Y = h_2(U, V) \quad /3/$$

Dosadením rovníc /2/ do /3/ dostaneme:

$$\begin{aligned} X &= h_1[g_1(X, Y); g_2(X, Y)] \\ Y &= h_2[g_1(X, Y); g_2(X, Y)] \end{aligned} \quad /4/$$

Rovnice /4/ sú transformačné rovnice vo všeobecnom tvare ľubovoľného kartografického zobrazenia podkladovej mapy do ľubovoľného kartografického zobrazenia zostavovanej mapy.

Prvým krokom pri presnej matematickej metóde je odvodenie inverzného tvaru zobrazovacích rovníc /1/ do rovníc /2/. Uvediem dve inverzie pravých azimutálnych zobrazení.

a) Lambertovo azimutálne ekvivalentné zobrazenie má v rovníkovej polohe tvar zobrazovacích rovníc:

$$X = \frac{\sqrt{2 \cdot \sin(U)}}{\sqrt{1 + \cos(U) \cdot \cos(\Delta V)}} \quad /5/$$

$$Y = \frac{\cos(U) \cdot \sin(\Delta V)}{\sqrt{1 + \cos(U) \cdot \cos(\Delta V)}} \quad /6/$$

Ide U je zemepisná šírka na guli a V je rozdiel zemepisných dĺžok medzi základným a daným poludníkom.

Po matematickej úprave rovníc /5/, /6/, ich umocnení a sčítaní, ako aj ďalšej matematickej úprave dostaneme vzťah pre výpočet rozdielu zemepisných dĺžok na guli:

$$\Delta V = \arctg \left[Y \sqrt{\frac{\left(\frac{2R^2}{x^2 + y^2 - 2R^2} \right)^2 - 1}{x^2 + y^2}} \right] \quad /7/$$

Pre výpočet zemepisnej šírky platí:

$$U = \arctg \left(\frac{X}{Y} \cdot \sin(\Delta V) \right) \quad /8/$$

b) Gnómonické azimutálne zobrazenie má tvar zobrazovacích rovníc:

$$x = \operatorname{tg}(U) \cdot \sec(\Delta V); \quad y = \operatorname{tg}(\Delta V) \quad /9/$$

Inverzia je tvaru:

$$\Delta V = \arctg \left(1 + \frac{X}{Y} \right); \quad U = \arctg \left(\frac{X}{Y} \sin(\Delta V) \right) \quad /10/$$

Tvar zobrazovacích rovníc je podstatne jednoduchší, ako tvar inverzií. Zložitejšie tvary tak zobrazovacích rovníc, ako aj ich inverzií sú pri kužeľových, valcových, prípadne nepravých zobrazeniach. Vyskytujú sa aj zobrazenia týchto skupín, ktorých zobrazovacie rovnice, ako aj ich inverzie, sú jednoduché. Napríklad Bonného, Werner-Stabeovo, Mercator-Sansonovo a ďalšie.

Stanovenie inverzie nie je možné vypočítať v každom prípade matematicky presne - jednoznačne. Ide o zobrazenia Molweidovo, Eckertovo, Urmajevovo, Kavrajského a rad ďalších. V týchto prípadoch riešime inverziu pomocou aproximácií, prípadne radov na počítaní.

Najzložitejšie je stanovenie inverzie, alebo ju vôbec nie je možné uskutočniť, ak nie sú známe špecifické parametre kartografického zobrazenia podkladovej mapy. Takými parametrami sú napr.: ktoré rovnobežky, prípadne poludníky sa neskresľujú, akým spôsobom bol stanovený polomer referenčnej gule, pre akú základnú rovnobežku, či bol volený a odvodený z objemu, povrchu, kvadrantu elipsoidu a podobne.

Bez znalosti týchto parametrov o podkladovej mape by nebolo možné stanoviť inverzlu a tým ani túto metódu prakticky použiť.

Uvedená metóda matematicky priraduje jednoznačne polohu bodu podkladovej mapy polohu bodu mapy zostavovanej.

Aj napriek zložitým výpočtom a náročnosťou na pamäť počítača je presná matematická metóda pri použití počítačovej grafiky najvýhodnejšia a zároveň najpresnejšia. Aplikácia uvedenej metódy je v tejto práci.

Aproximačná, interpolačná, vyrovnávací, iteračná a ďalšie transformačné metódy

V niektorých prípadoch, hlavne ak sú kartografické zobrazenia podkladovej a zostavovanej mapy podobné, t.j. ak obrazy poludníkov a rovnobežiek sú priamky, alebo podobné krivky, použijeme jednu z aproximačných, prípadne ďalších metód. Tieto metódy použijeme tiež vtedy, ak sú obe kartografické zobrazenia podobné matematickými vzťahmi, prípadne ak sú zobrazenia zostavovanej a podkladovej mapy tie isté pre odstránenie nepravidelnosti zrážky podkladovej mapy v rôznych jej častiach.

Afínná transformácia sa používa hlavne pre lineárnu transformáciu rozdelením podkladovej mapy na lichobežníky, prípadne trojuholníky, ktoré po transformácii znovu pospájame na zostavovanej mape. Obdobné použitie majú aj ďalšie transformačné metódy. K posledným moderným transformačným metódam patria Lagrangeova a metóda pomocou spline funkcií, ktoré sú teoreticky a aplikácie uvedené v [3].

Aplikácia presnej matematickej transformačnej metódy

Ako podkladová mapa pre transformáciu bola použitá fyzická mapa "Afriky" z [5] v mierke 1:20 000 000. Mapa bola vyhotovená v ekvivalentnom azimutálnom zobrazení v rovníkovej polohe - Lambertovom. Z experimentálnych dôvodov bola vykonaná transformácia zemepisnej siete s hustotou $U = V = 10^0$ a obrisu kontinentu Afriky (príloha 1). Zostavovaná mapa bola volená v dvoch modifikáciách:

- a) Konformné valcové zobrazenie v normálnej polohe - Mercatorovo zobrazenie.
- b) Perspektívne stereografické pseudocylindrické - Kuskovo zobrazenie.

Pretože zobrazovacie rovnice podkladovej mapy sú známe /5/, /6/, bola vypočítaná inverzia týchto rovníc /7/, /8/, čím boli splnené podmienky pre určenie sférických súradníc zemepisných z pravouhlých na pôvodnej mape. Tieto môžu slúžiť pre matematickú transformáciu do ľubovoľného kartografického zobrazenia, ktoré si zvolíme pre novozostanovanú mapu.

Prvým zvoleným zobrazením je Mercatorovo zobrazenie, ktorého tvar zobrazovacích rovníc je tento:

$$X = R \cdot \text{Intg} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right); \quad Y = R \cdot \Delta V \quad /11/$$

Z podkladovej mapy boli digitalizované priesečníky zemepisnej siete spolu s obrysmi kontinentu v stolových súradniciach, ktoré boli transformované na pravouhlé X, Y v Lambertovom zobrazení. Tieto slúžili ako vstupné údaje do inverzných rovníc /7/, /8/ pre výpočet sférických súradníc U, V. Sférické zemepisné súradnice boli uložené do súboru na disk a slúžili ako vstupné údaje na výpočet X, Y v Mercatorovom zobrazení. Na základe kresliaceho programu pre automatický koordinátograf, vyhotoveného na počítači, bola vykreslená sieť poludníkov a rovnobežiek spolu s obrysmi Afriky v navrhovanom kartografickom zobrazení (príloha 2).

Druhým navrhovaným zobrazením je perspektívne stereo- grafické pseudocylindrické zobrazenie - Kuskovo, ktorého tvar zobrazovacích rovníc je:

$$X = 2R \alpha, \quad Y = \frac{2R \cdot \sin(U) \cdot \cos(\alpha)}{1 + \cos(U) \cdot \cos(\Delta V)} \quad /12/$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\cos(U) \cdot \sin(\Delta V)}{1 + \cos(U) \cdot \cos(\Delta V)}$$

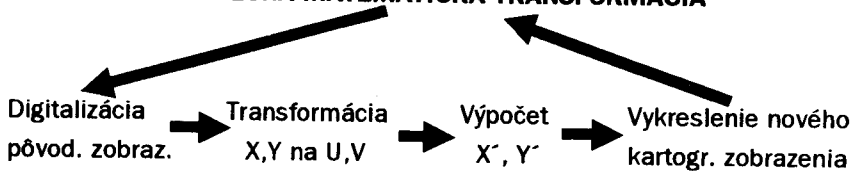
V tomto zobrazení bola transformovaná iba geografická sieť pre určenie presnosti polohy transformovaného bodu presnej matematickej metódy. Postup aplikácie uvedenej metódy je podobný ako pri transformácii do Mercatorovho zobrazenia. Transformovaná geografická sieť v Kuskovom zobrazení je v prílohe 3.

Pri posudzovaní presnosti transformácie z Lambertovho do Mercatorovho, prípadne Kuskovho zobrazenia vychádzame z presnosti vykonania týchto operácií:

- stanovenie presnosti podkladovej mapy, prípadne korekcie papierovej predlohy porovnaním súradníc priesečníkov geografickej siete vypočítaných a digitalizovaných z mapovej predlohy,
- digitalizácia mapovej predlohy,
- výpočet a vykreslenie transformovanej predlohy.

Stredné chyby sú vypočítané z rozdielov pravouhlých súradníc priesečníkov geografickej siete vypočítaných na počítači a digitalizovaných súradníc v Lambertovom zobrazení, prípadne Mercatorovom a Kuskovom zobrazení. Porovnanie bolo vykonané pre 81 priesečníkov siete. Pomerne veľký počet matematických a grafických operácií ovplyvnil presnosť vykreslenia polohy transformovaného bodu do Mercatorovho ($m_{x,y} = 0,261$ mm, prípadne do Kuskovho $m_{x,y} = 0,195$ mm. Rozdiel v polohovej presnosti medzi oboma volenými zobrazovaniami je spôsobený rozdielnym tvarom zobrazovacích rovníc. Zobrazovacie rovnice /11/ Mercatorovho zobrazenia obsahujú logaritmickú funkciu v spojení s goniometrickou, ktorá si vyžaduje pre dosiahnutie určenia presnosti $m_{x,y} = 0,0001$ mm programovať výpočet na počítači s dvojitou presnosťou. Schematický postup transformácie je na obr.1.

PRESNÁ MATEMATICKÁ TRANSFORMÁCIA



Obr.1 Schéma postupu transformácie

Záver

Porovnaním presnosti matematickej transformačnej metódy bolo ukázané, že metóda je vhodná pre transformáciu obsahu podkladovej mapy do zostavovanej mapy ľubovoľného kartografického zobrazenia pomocou počítačovej grafiky. Výpočty boli vykonané na počítači SM-4-20 vo výpočtovom stredisku Stavebnej fakulty. Digitalizácia údajov na DGZ-1208 ako aj vykreslenie na automatickom koordináto-grafe Digigraf DGZ-1208A boli vykonané v laboratóriu počítačovej grafiky na Katedre mapovania a pozemkových úprav Stavebnej fakulty. Táto metóda má plné uplatnenie v kartografickej praxi. Upozorňuje na perspektívy prudkého rozvoja počítačovej grafiky a jej využitie pre automatizovanú tvorbu máp.

LITERATÚRA

- [1] DANIŠ M. - VALKO J. : Matematická kartografia, ES SVŠT 1988.
- [2] VALKO J.: Príspevok k automatizácii výpočtových a zobrazovacích prác, KDP, Stavebná fakulta SVŠT Bratislava 1978.
- [3] BRANDENBERGER CH. G.: Koordinatentransformation für digitale kartographische Daten, ETH, Zürich 1985.
- [4] Atlas kartografických zobrazení, Fakultná výskumná úloha F-14/73, Stavebná fakulta SVŠT, Bratislava 1975
- [5] Atlas mira, GUGiK, Moskva, 1954.

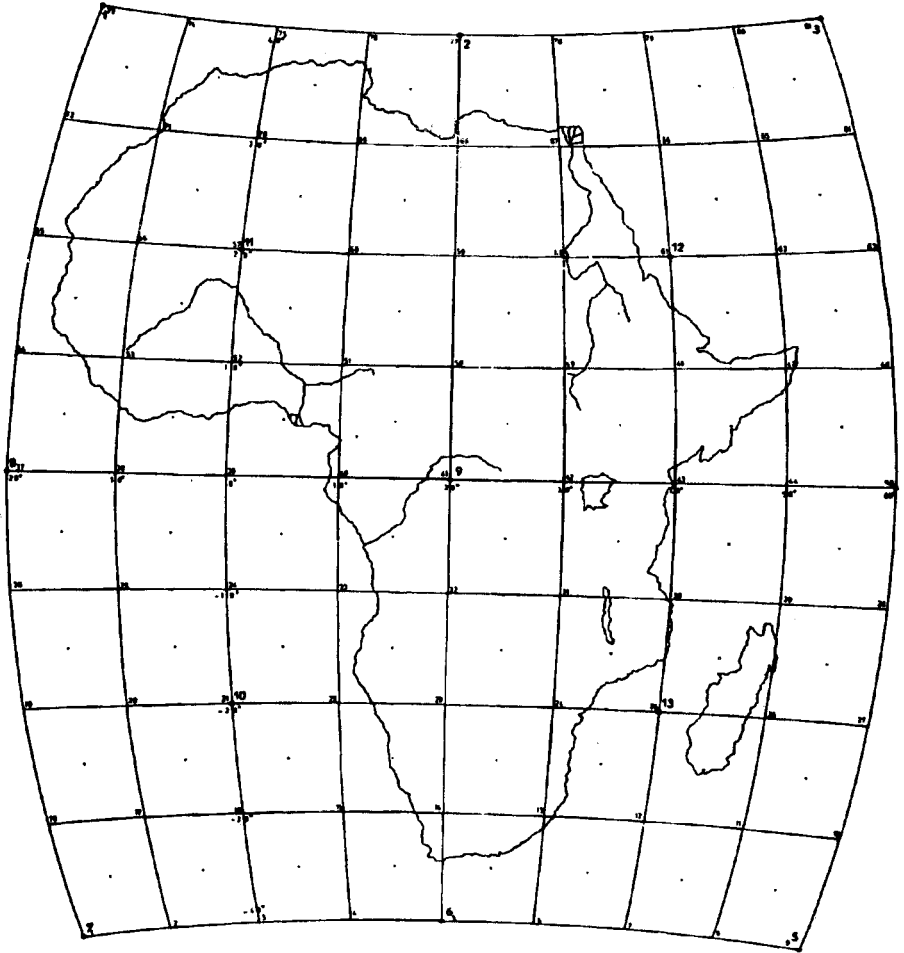
S u m m a r y

Application of accurate mathematical method of transformation in cartography

The mentioned contribution works out exact transformation method and its application in constructing maps of small scales. This method is based on the full application of modern computer and representation technology. Cartographic network together with the content of the basic map is digitised in the rectangular co-ordinates from which we can calculate geographical co-ordinates by the means of the inversion of the representation equations. Using that method we obtain information data base in the geographical co-ordinates which can be used as an entry for the calculation of the rectangular co-ordinates in the arbitrary cartographical projection of the first-compiled map.

A F R I K A

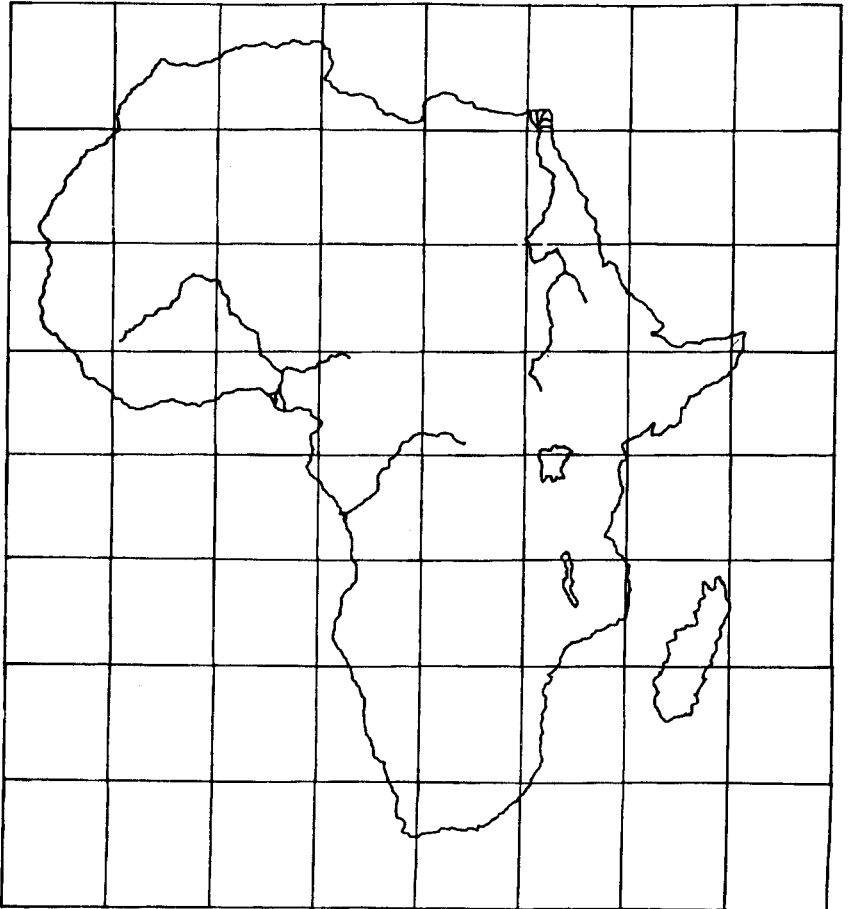
LAMBERTOVO ZOBRAZENIE



Príloha 1

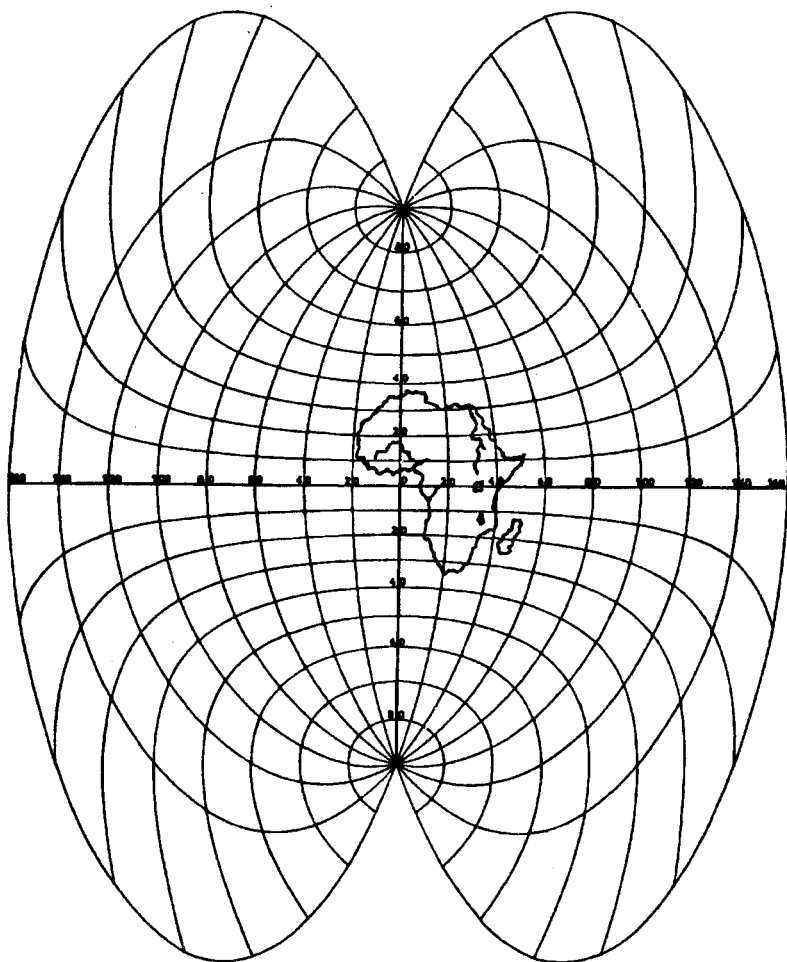
A F R I K A

TRANSFORMÁCIA: LAMBERT-MERCATOR



Príloha 2

KUSKOVO ZOBRAZENIE
TRANSFORMÁCIA: LAMBERT - KUSKA



Príloha 3