

Eva MAKAROVÁ

NIEKOĽKO POZNÁMOK K PROBLEMATIKE SKRESLENIA NA MAPE

Makarová Eva: Some remarks to the problem of the distortion on the map. Kartografické listy, 1993, 1, 6 figs, 1 tab., 13 refs.

Abstract: The distortion of the map is understood mostly as the deformation of geometric elements which happens during map projection. In the paper in the context of the term distortion the geometric changes which happen at rectangular projection on the topographic project plane are also included. This circumstance was taken into account by the author when creating the definition and the classification of distortions.

Key words: distortion of the map, map projection, rectangular projection, definition and the classification of distortions.

Úvod

Pojem **skreslenie na mape** (Iskaženiye, Verzerrung, Distortion) je v učebniciach a príručkách matematickej kartografie chápaný, objasňovaný a matematicky vyjadrovaný takmer výlučne v kontexte procesu kartografického zobrazovania. V zásade je skreslenie prezentované ako produkt matematickej transformácie geografických súradníc nerovinných referenčných telies (gule, rotačného elipsoidu) na súradnice rovinných vzťažných systémov mapy (karteziánskeho alebo polárneho). Transformácia je sprostredkovaná dvojicou funkcionálnych závislostí, ktoré je možné vyjadriť vo všeobecnom tvare:

$$x = f_1(\phi, \lambda), \quad y = f_2(\phi, \lambda) \quad /1/$$

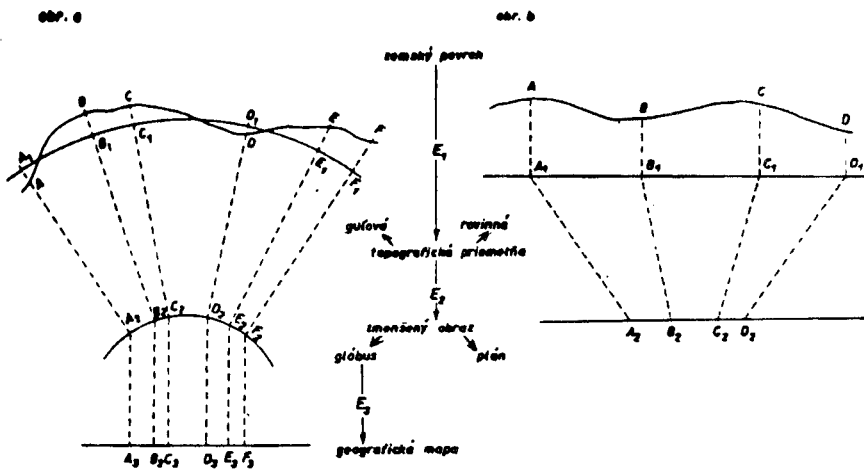
kdé sú ϕ a λ - geografické súradnice referenčnej plochy,

x a y - rovinné súradnice mapy.

V článku chceme načrtnúť problematiku skreslenia na mape v širšom kontexte a pokúsiť sa o adekvátnu formuláciu predmetného pojmu.

K pôvodu skreslenia

Skreslenie môžeme považovať za skrytú matematickú vlastnosť mapy, ktorá súvisí s jej matematickou podstatou. V procese tvorby matematickej osnovy mapy sa teoreticky vyčleňujú tieto čiastkové kroky (etapy) - pozri obr. 1:



Cbr. 1 Postup pri konštrukcii matematickej osnovy
a) geografickej mapy, b) plánu

1. pravouhlé **premietanie** skutočného (fyzického) povrchu Zeme na náhradnú matematickú plochu (referenčná plocha, topografická priemetňa),

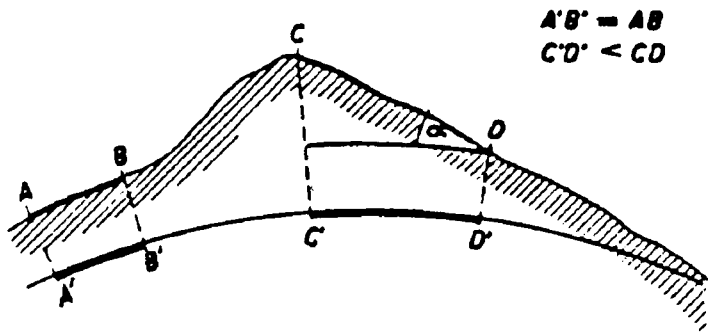
E 2. **zmenšenie** referenčnej plochy, stanovené mierkou mapy,

E 3. **zobrazovanie** zmenšenej nerovnnej priemetne do roviny, prostredníctvom vhodných matematických metód, tzv. kartografických zobrazení, je tretím krokom tohto procesu.

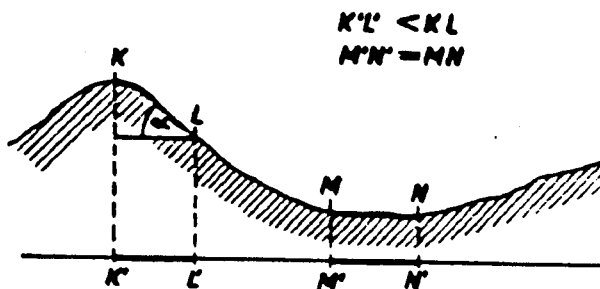
Každému z uvedených krokov zodpovedá matematický prvok mapy s konkrétnou orientačnou funkciou. Prvému kroku zodpovedajú obrazy **triangulačných bodov**, slúžiace na umiestnenie kartografickej siete. Druhému kroku zodpovedá **mierka mapy**, zabezpečujúca rozmerovú orientáciu na mape. **Kartografická sieť** zodpovedá tretiemu kroku a slúži na priestorovú orientáciu v horizontálnom smere a tiež na presnú lokalizáciu kartografických znakov.

Jednotlivé kroky načrtnutého teoretického procesu reprezentujú odlišné matematické úkony. Tieto sa podieľajú na deformáciách pôvodnej (originálnej) geografickej siete, prostredníctvom ktorej sa transformácia uskutočňuje, a následne aj vlastného obsahu mapy, v rozličnej miere.

V etape **premietania**, tak na rovinnú ako aj na zakrivenú (guľovú, elipsoidickú) plochu, sa **skresľujú dĺžky**. Vyplyva to z geometrických vlastností pravouhlého premietania. Ak sa pri premietaní na guľovú priemetňu premieta vodorovná plocha, t.j. $\alpha = 0^\circ$ (obr. 2), vtedy $A'B' = AB$, pri priemete strán s uhlom sklonu $\alpha > 0$, je priemet $C'D' < CD$. Analogicky pri pravouhlom premietaní na rovinu (obr. 3): $M'N' = MN$, keď $\alpha = 0^\circ$, $K'L' < KL$, keď $\alpha > 0^\circ$.



Obr. 2 K premietaniu na nerovinnú priemetňu



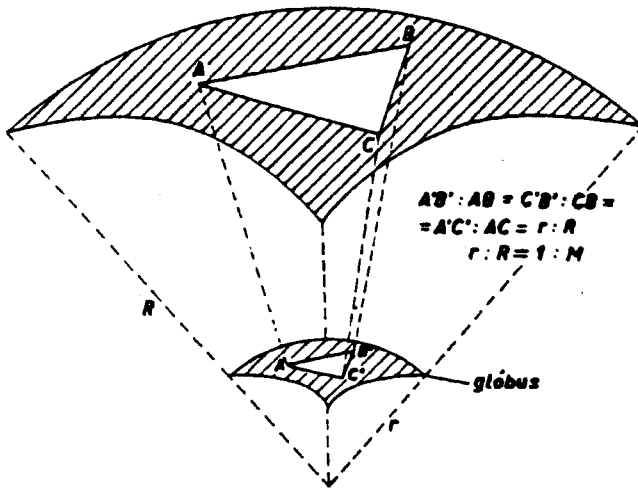
Obr. 3 K premietaniu na rovinnú priemetňu

V oboch prípadoch teda pri pravouhlom premietaní dochádza k dĺžkovému skresleniu. Prítom dĺžka obrazu (priemetu) je vždy menšia, nanajvýš rovná dĺžke originálu.

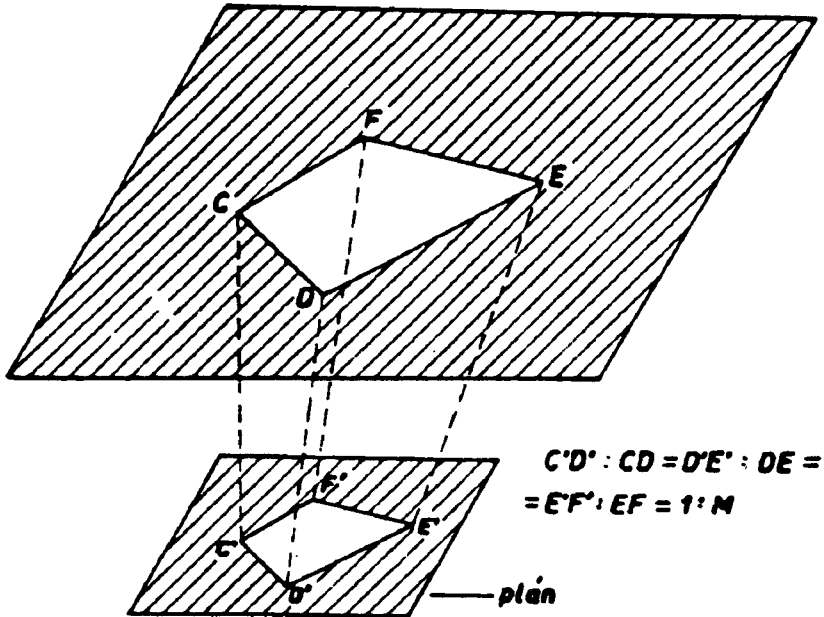
Zo skreslenia dĺžok vyplýva aj **skreslenie plôch**. Horizontálne uhly sa pri premietaní neskresľujú, vertikálne uhly (uhol sklonu) sa nezobrazia, presnejšie povedané, redukujú sa na hodnotu 0° .

Zmenšením topografickej priemetne podľa mierky vznikne geometricky podobný obraz. Zmenšením guľového priemetu teoreticky vznikne guľa s menším polomerom, prakticky glóbus, zmenšením rovinného priemetu vznikne plán (pozri obr. 1).

Na zmenšených geometricky podobných obrazoch topografických priemetní sú dĺžky a plochy zachované v konštantnom pomere, ktorý je daný mierkou mapy. Vyplýva to z dokazovania na obr.4 pre guľovú, na obr. 5 pre rovinnú priemetňu.



Obr. 4 Zmenšenie nerovninnej priemetne



Obr. 5 Zmenšenie rovinnej priemetne

V najväčšej miere dochádza k **deformáciám** nerovinných priemetní pri kartografickom **zobrazovaní**. Príčinou, ako vieme, je okolnosť, že povrch gule ani rotačného elipsoidu nie je rozvinuteľný do roviny bez skreslenia. Ak zoberieme do úvahy ešte požiadavku spojitosti mapového obrazu, možnosť skreslenia je tým väčšia.

K objektu skreslenia

Z predchádzajúcich úvah vyplynulo, že pri matematickej transformácii skutočného povrchu Zeme, t.j. georeliéfu, na náhradnú matematickú plochu **premletaním**, skresleniu podliehajú len areály plôch s nenulovým uhlom sklonu, t.j. **stráne**. Prítom sú deformované jednak dĺžkové rozmery strání (merané v smere spádnic), jednak ich plošné rozmery. Treba podotknúť, že dĺžkové rozmery čiar reliéfu s horizontálnou polohou (vrstevníc, úpätníc,...) a tiež šírkové rozmery strání sa neskresľujú.

Originálom transformácie pri kartografickom **zobrazovaní** je teoreticky zmenšený obraz nerovnnej topografickej priemetne. Prostriedkom transformácie je dvojica analytických rovníc /1/, vyjadrujúca vzťah polohy diskrétného bodu originálu (na zmenšenej priemetni) a obrazu (na mape). **Transformácia** celej matematickej plochy sa prakticky uskutočňuje prostredníctvom kartografickej siete, ktorá je vzťažnou osnovou vlastného obsahu mapy. Požadované vlastnosti skreslenia siete a tým celého obsahu mapy prostredníctvom rozmerov a tvaru základných geometrických elementov (čiar, plôch, uhlov), sú teda v závislosti od účelu vyjadrené **zobrazovacími rovnicami**.

K faktorom skreslenia

Spomenuté súvislosti ukazujú, že skreslenie pri požiadavke spojitosti mapového obrazu je podmienené viacerými faktormi s diferencovanou mierou vplyvu. Významným sa javí **topografická priemetňa**. Jej voľba je ovplyvnená **veľkosťou** zobrazovaného **územia**, ktorá determinuje **mierku mapy**. Tieto funkcionálne súvisiace matematické faktory súborne reprezentujú proces vzniku matematickej osnovy mapy. Ako je známe, táto vlastnosť je kritériom triedenia máp na plány, geografické a topografické mapy (pozri tab. 1).

Záveru súvisiace so skreslením sú jednoznačné, ak ide o jednotlivé mapové diela, t.j. plány a geografické mapy. Plán, ako geometricky podobná, t.j. neskreslená zmenšenina rovinného priemetu malého územia (do cca 200 km²) zemského povrchu, má len **skreslenie z priemetu**. Faktorom, ktorý modifikuje intenzitu skreslenia dĺžok a plošných rozmerov strání, je výlučne **uhol sklonu**.

Geografické mapy zobrazujú celý povrch Zeme, alebo jeho veľké časti. Preto, vzhľadom na malé mierky, je skreslenie z priemetu zanedbateľné. Naopak, **skreslenie**, ktoré vzniká pri kartografickom **zobrazovaní** nerovinného priemetu, je typickým sprievodným znakom týchto máp. Vlastnosti skreslenia (druh, intenzita, priestorové rozmiestnenie) sú ovplyvňované ďalšími faktormi: druhom pomocnej zobrazovacej

Tab. 1 Skreslenia na základných druhoch máp
Table 1 Distortions on basic types of the maps

veľkosť územia greatness of territory	malé do 200 km ² small to 200 km ²	stredný 200 km ² - 10 000 km ² middle 200 km ² - 10 000 km ²	veľké nad 10 000 km ² large over 10 000 km ²
topografická priemetňa topographic project plane	rovina the plane	rovina - pre obsah elipsoidická - pre sieť the plane for the contents ellipsoidal for the net	guľová spherical
mierky scales	veľké do 1:5000 large to 1:5000	stredné 1:5000 - 1:500 000 middle 1:5000 - 1:500 000	malé nad 1:500 000 small over 1:500 000
DRUH MAPY KIND OF MAP	PLÁN THE PLAN	TOPOGRAFICKÁ TOPOGRAPHIC	GEOGRAFICKÁ GEOGRAPHIC
vzťah k priemetu relation to the project	podobný obraz the similar representation	mierne skreslený obraz a little distorted representation	značne skreslený obraz considerably distorted representation
platnosť mierky validity of scale	vo všetkých smeroch at all directions	vo všetkých smeroch at all directions	obmedzená limited
skreslenie the distortion			
a) z priemetu from the rectangular projection	dĺžkové, plošné of the length, of the plane	dĺžkové, plošné of the length, of the plane	zanedbateľné insignificant
b) zo zobrazenia from the map projection	nulové noughtly	zanedbateľné insignificant	dĺžkové, plošné, uhlové, tvarové of the length, of the plane, of the angle, of the form

plochy, jej polohou voči zobrazovanému glóbusu, polohou stredu premietania a pod.

Topografické mapy tvoria mnoholistové systémy, ktoré ako celok pokrývajú rozsiahle plochy zemského povrchu, jednotlivé listy však zobrazujú len malé územia (do 10 000 km²). Vzhľadom na to **skreslenie**, ktoré vzniká pri **zobrazovaní** kartografickej siete celého systému, je na jednotlivom liste **zanedbateľné**. Môžeme konštatovať, že topografické mapy, podobne ako plány, obsahujú len skreslenie z priemetu (pozri tab.1).

K definícii a klasifikácii skreslenia

Skreslením v širšom slova zmysle budeme rozumieť zmeny (deformácie) **základných geometrických prvkov povrchu Zeme** (georeliéfu) a **referenčných točiek**, t.j. bodov, čiar, plôch a uhlov, **ktoré vznikajú pri tvorbe matematickej osnovy mapy**. Skresleniu môžu podliehať jednak rozmery, jednak tvar geometrických prvkov.

Najčastejšie sa skreslenie triedi podľa druhu *geometrických* prvkov, pričom sa do úvahy berú len ich rozmery:

1. skreslenie čiar (dĺžkové) - s_d
2. skreslenie plôch (plošné - s_p
3. skreslenie uhlov (uhlové) - s_u

Vzhľadom na to, že sa pri tvorbe osnovy deformuje aj tvar geometrických prvkov, môžeme hovoriť aj o tvarovom skreslení a vyčleniť ho ako samostatný druh, alebo ho môžeme pripojiť k predchádzajúcej klasifikácii ako štvrtú kategóriu.

Ako vyplynulo z predchádzajúcej analýzy, skreslenie môžeme triediť aj podľa jeho **pôvodu** a rozlíšiť:

- 1) **skreslenie**, ktoré vzniká pri pravouhlom **premietaní** na topografickú priemetňu,
- 2) **skreslenie**, ktoré vzniká pri kartografickom **zobrazovaní** nerovinnej referenčnej plochy do roviny.

Obidva triediace znaky môžeme využiť na vytvorenie dvojstupňovej klasifikácie:

1. dĺžkové skreslenie

1.1. z priemetu

1.2. zo zobrazenia

2. plošné skreslenie

2.1. z priemetu

2.2. zo zobrazenia

3. skreslenie uhlov

3.1. horizontálnych zo zobrazenia

3.2. vertikálnych (uhla sklonu) z priemetu

4. skreslenie tvarov

4.1 z priemetu

4.2 zo zobrazenia

Dĺžkové skreslenie môžeme všeobecne definovať ako pomer dĺžkového elementu na zobrazovacej ploche ds' ku korešpondujúcemu elementu plochy originálnej ds , a vyjadriť v matematickej podobe:

$$s_d = \frac{ds'}{ds} \quad /2/$$

Keďže originálnou plochou pri premietaní je fyzický povrch Zeme (georeliéf) a zobrazovacou plochou je topografická priemetňa, dĺžkové skreslenie je pomerom dĺžky pravouhlého priemetu stránke k jej skutočnej dĺžke (pozri obr. 2).

Ak KL je dĺžka stráně meraná po spádnicí a $K'L'$ je jej kolmý priemet na topografickú priemetňu, potom platí (pozri obr. 3):

$$\frac{K'L'}{KL} = \cos \alpha$$

Dĺžkové skreslenie (strání), ktoré vzniká pri premietaní, má hodnotu $\cos \alpha$, závisí teda od uhla sklonu príslušnej stráně.

Z charakteru goniometrickej funkcie cosinus vyplýva, že s klesajúcou hodnotou uhla sklonu sa dĺžkové skreslenie znižuje. Pre $\alpha = 0^\circ$ je $\cos 0^\circ = 1$, čiže skreslenie je nulové. Pri kartografickom zobrazovaní je originálom nerovinná topografická priemetňa (referenčná plocha) a zobrazovacou plochou je rovina (mapa). Dĺžkové skreslenie je teda pomerom dĺžkového elementu na mape ku korešpondujúcej dĺžke na referenčnej ploche, samozrejme vyjadrenej v mierke mapy.

Ak platí:

$$s_d = 1,$$

potom meraná čiara nie je dĺžkovo skreslená,
ak platí

$$s_d > 1,$$

potom dĺžka obrazu je väčšia,

$$\text{ak platí } s_d < 1,$$

dĺžka obrazu je menšia ako korešpondujúca dĺžka originálu.

Plošné skreslenie je definované ako pomer plošného elementu na zobrazovacej ploche d'_p ku zodpovedajúcemu elementu originálu d_p , t.j.

$$s_p = \frac{d'_p}{d_p} \quad /3/$$

Z analýzy objektu skreslenia vplynulo, že šírkový rozmer strání sa pri premietaní neskršuje. Poznatky z geometrie nás oprávňujú urobiť záver, že skreslenie plošných rozmerov pri premietaní, analogicky ako skreslenie dĺžok, je ovplyvnené uhlom sklonu stráně a má hodnotu $\cos \alpha$.

Uhlové skreslenie je definované ako rozdiel uhla v obraze α' a origináli α .

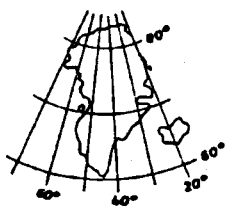
$$s_u = \alpha' - \alpha \quad /4/$$

Uhlovým skreslením v kartografii sa rozumie skreslenie horizontálnych uhlov, pretože vertikálne uhly (uhol sklonu) nie sú v rovine mapy zobrazené. Deformácie

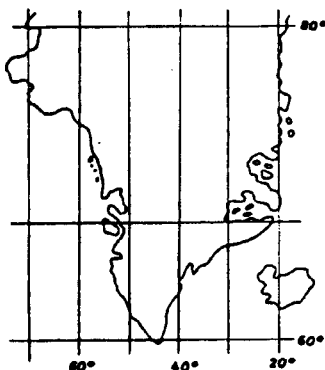
horizontálnych uhlov sa obmedzujú len na proces kartografického zobrazovania, pretože pri premietaní, ako sa už uvádzalo, k ich skresleniu nedochádza.

Skreslenie tvarov, podobne ako skreslenie uhlov, súvisí hlavne s kartografickými zobrazovacími metódami. Pritom môže dochádzať k rozličným deformáciám bodov, čiar i tvaru plošných obrazcov kartografickej siete a následne obsahu. Je známe, že k deformáciám tvarovej podoby nedochádza pri rovnouhlých zobrazeniach, s extrémnym skresľovaním tvaru sa stretávame na rovnoplošných mapách (pozri obr. 6).

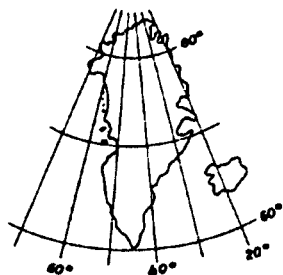
obr. a



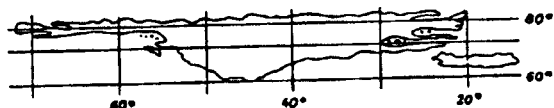
obr. b



obr. c



obr. d



Obr. 6 Skreslenie na príklade Grónska podľa Brunner H. a kol.

a), b) príklady rovnouhlých zobrazení so zachovanou tvarovou podobou

c), d) príklady rovnoplošných zobrazení s extrémne skreslenými uhlami a tvarom

Záver

V článku sme načrtli problematiku skreslenia na mape v širšom kontexte ako je tradíciou.

Do obsahu pojmu, ktorý chápeme ako deformácie vznikajúce pri kartografickom zobrazovaní, sme priradili (začlenili) aj geometrické zmeny, ku ktorým dochádza pri pravouhlom premietaní na topografickú priemetňu. Túto okolnosť sme zohľadnili pri tvorbe všeobecnej definície skreslenia, pri definíciách jednotlivých druhov a tiež pri klasifikácii skreslenia.

V novovytvorených definíciách je možné tradičné chápanie považovať za skreslenie v užšom zmysle slova.

LITERATÚRA

- BRUNNER, H., BÖHLIG, K., GOTZ, H. (1984): Lehrbuch für Kartographiefacharbeiter. Gotha, Hermann Haack, 127s.
- FIALA, F. (1955): Matematická kartografie. Praha, NČSAV, 287 s.
- HOJOVEC, V. a kol. (1987): Kartografie. Praha, GKP, 660 s.
- KUCHAR, K. (1971): Přehled matematické kartografie. Praha, SPN
- KUSKA, F. (1960): Matematická kartografia. Bratislava, SVTL, 294 s.
- LIODT, G.N. (1954): Nauka o mapách. Praha, NČSAV, 400 s.
- MAKAROVÁ, E. (1987): Skreslenie na mape. Súbor priesvitiek so sprievodným textom. Banská Bystrica, Učebné pomôcky n.p., 10 priesvitiek, 24 s.
- MAKAROVÁ, E. (1992): K problematike skreslenia v kartografii z hľadiska užívateľa mapy. In: Zborník vedeckovýskumných prác. Série prírodovedná č.1. Acta Universitatis Mathaei Belii Banská Bystrica, s.195-212.
- SALIŠČEV, K.A. (1976): Kartovedeniye. Moskva, Izd. Moskovskovo universiteta, 437 s.
- SEKO, L. (1985): Kartografia a topografia. Bratislava, UK, 208 s.
- SLOVNÍK geodetického a kartografického názvosloví. Kartografie (1984). Edice Výskumného ústavu geodetického, topografického a kartografického. Řada 4. Zdiby.
- SRNKA, E. (1986): Matematická kartografie. Brno, Vojenská akademie.
- TICHÝ, O., ŠVEC, R. (1965): Matematický zeměpis a kartografie. Praha, SPN, 300 strán.

Summary

Some remarks to the problem of the distortion on the map

Distortion is considered a hidden mathematical map element, that originates in the process of the creation of its mathematical system. Three theoretical stages that represent distinct mathematical operations occur in this process:

1. Substitution of the physical surface of the Earth (georelief) by a reference plane is represented by the orthographic projection.
2. Reduction of the reference plane is expressed by the ratio (scale).

3. The stage of the cartographic projection is represented by the mathematical transformation of the geographic coordinates of the non-planar referential bodies to the place coordinates of the map [1].

The biggest deformations of the object-original occur in the process of the cartographic projection. Distortion in cartography generally means precisely this kind of deformation. But the changes originate also in the stage of projection, when the vertically dissected terrain is substituted by a simple area with a zero vertical dissection (Fig. 1).

Concerning the object of distortion:

We know from the mathematical cartography that the original of the cartographic projection is a spheric or ellipsoidal project plane reduced in a map scale, that the transformation of the whole mathematical plane is realized by means of geographic grid, that the object of the distortion are the geometrical elements: points, lines, horizontal angles, surface area configurations and finally that deformed can be the dimensions, shape, i.e. the whole, proper map contents. With projection of only the relief areas with non-zero slope angle, i.e. slope are deformed. Their lengths, overall area and also the slope angle, reduced to zero value, are deformed.

Concerning the factors of distortion: The chief factor of the distortion is the sort of the topographical project plane conditioning the classification of the maps to the plans, topographical and geographical maps. The plan contains only the distortion of the project. The factor modifying the intensity of distortion of the lengths and areas of the slopes is the slope angle (Fig.3). The distortion as caused by the project of the geographical maps, with regard to the small scales, is negligible (Tab.1). But the distortion with the origin in the cartographic projection is typical.

Concerning the definition of the distortion:

Under the distortion in a broader sense of the word the changes (deformations) of the geometrical elements of the Earth's surface (georelief) and the referential bodies (i.e. points, lines, planes and angles that originate in the creation of the mathematical system of the map. Distorted can be the dimensions and the shapes of the geometrical elements.

Concerning the classification of the distortions:

A two-step classification of the projections according to the origin of the distortion and a sort of geometrical element:

1. longitudinal distortion from the rectangular projection and cartographic projection,
2. surface area distortion,
3. distortion of the angles: vertical from the project and horizontal from cartographic projection,
4. distortion of the forms.

The traditional view of the distortion in the context of new definition, can be considered a distortion in a narrower sense.

Fig. 1 Procedures concerning the construction of the mathematical system

- a) geographical map,
- b) plan

Fig. 2 Projection on the non-planar project plane

Fig. 3 Projection on the planar project plane

Fig. 4 Reduction of the non-planar project plane

Fig. 5 Reduction of the planar project plane

Fig. 6 Distortion on the example of Greenland (after Brunner H. et al.)

- a), b) examples of the conforming projection with preservation of the form
- c), d) examples of equivalent projections with extreme distortion of the form and angles

Table 1 Distortions on basic types of the maps