

Margita VAJSÁBLOVÁ

## VPLYV TVARU AREÁLU NA SPOLĀHLIVOSŤ JEHO OBSAHU

**Vajsáblová M.: Influence of the Shape on Reliability of Area Value.** Kartografické listy 2002, 10, 7 figs., 2 tabs., 5 refs.

**Abstract:** In the spatial model we have calculated areas of planar objects and areas of the region of reliability of area. Analysis of the results has exhibited influence of different factors on accuracy of area values, in particular, influence of the shape of landscape regions (characterised by the index of compatibility). Our examination of correlation of shape and maximal admissible error at a point (or of the size of the circular shape drawing pen) resulted in a construction of the corresponding regression function. Applications of our results are expected in map digitalisation and in actualisation of spatial computer databases.

**Keywords:** index of compatibility, regression function, the region of reliability of area.

### Úvod

Spolahlivosť obsahu areálu je možné analyzovať z rôznych hľadísk vplyvu, napr. z hľadiska sklonu georeliéfu, kvality vstupných dát súvisiacej s podrobnosťou dátovej množiny (mierky mapy), metódy výpočtu obsahu areálu závislej od spôsobu geometrického modelovania jeho hranice, príp. použitia softvéru pri určovaní obsahu, kompaktnosti, čiže tvaru areálu, prípustnej polohovej odchýlky bodu hranice, príp. z grafického vyjadrenia hranice určitou hrúbkou čiary.

V tomto článku sa pozornosť zameriava na spolahlivosť určenia obsahu areálu z hľadiska jeho grafického vyjadrenia hrúbkou čiary, prípustnej polohovej odchýlky bodu a tvaru areálu.

### Index kompaktnosti areálu a obsah oblasti spolahlivosti hranice

Tvar areálu má vplyv na jeho úžitkovosť, ale tiež na možnú nepresnosť určenia obsahu areálu. Preto treba brať do úvahy kritérium presnosti obsahu areálu. Kvantitatívne vyjadrenie tvaru vyjadruje index kompaktnosti areálu. V tejto analýze sa používa index kompaktnosti podľa K. Husára [1] počítaný zo vzťahu:

$$I_k = 4\pi \frac{S}{O^2} \quad (1)$$

kde  $S$  je obsah areálu a  $O$  je jeho obvod.

Hodnoty indexu kompaktnosti  $I_k$  ležia v intervale  $(0, 1)$ , kde  $I_k = 0$  pre úsečku a  $I_k = 1$  pre kruh. Z hľadiska geometrického vyjadrenia areálu na mape sú tieto dve krajné možnosti iba na teoretickej báze, úsečka nie je vyjadrením areálu.

Pri analýze presnosti obsahov areálov v rôznych podrobnostiach mapy je nutná úvaha o súvislosti možnej odchýlky obsahu od maximálnej prípustnej polohovej odchýlky bodu na mape a pri grafickom vyjadrení od hrúbky čiary, teda od polomeru kresliaceho kruhového pera [2]. Z hľadiska geometrického ide o ekvivalentné faktory vplyvu s rovnakou geometrickou interpretáciou. Túto množinu bodov (vyjadrujúcu oblasť možnej odchýlky bodov hranice areálu) a súčasne množinu bodov, ktoré popisuje kruhové pero, budeme ďalej nazývať *oblasť spoľahlivosti hranice areálu*.

Na obr. 1a-c sú znázornené oblasti spoľahlivosti geometrických objektov. Ich tvar je určujúcim parametrom veľkosti obsahu tejto oblasti, maximálna prípustná polohová odchýlka bodu na mape je označená ako  $p$ .

Opíšeme indexy kompaktnosti a obsahy oblastí spoľahlivosti pre tieto modely areálov:

**Kruh** (obr. 1a) s polomerom  $r = 1$  má index kompaktnosti  $I_k = 1$  a obsah oblasti okolo jeho hranice je možné vyjadriť vzťahom:

$$\Delta S = 4p\sqrt{\pi} \quad (2)$$

**Obdĺžnik** (obr. 1b) so stranami  $a$  a  $\frac{1}{a}$  má index kompaktnosti:

$$I_k = \frac{\pi}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} \quad (3)$$

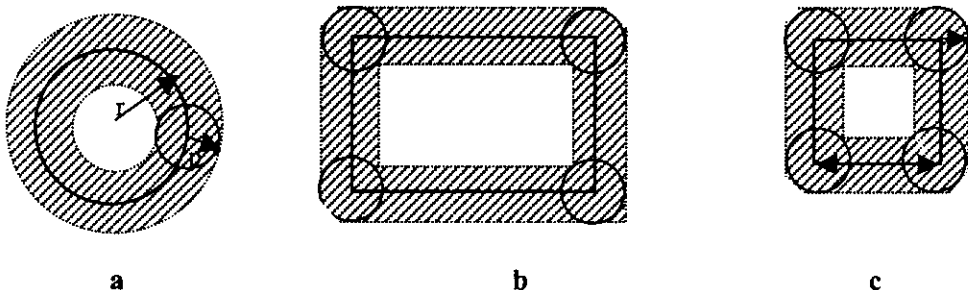
Obsah oblasti okolo hranice obdĺžnika je možné vyjadriť vzťahom:

$$\Delta S = 4p\left(a + \frac{1}{a}\right) + p^2\pi - 4p^2 \quad (4)$$

V analýze sme použili obdĺžniky so stranami  $a = \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1\}$ .

**Štvorec** (obr. 1c) – ako špeciálny obdĺžnik so stranou  $a = 1$ , má podľa vzťahu (3) index kompaktnosti  $I_k = \frac{\pi}{4}$ . Obsah oblasti okolo hranice štvorca je možné vyjadriť vzťahom:

$$\Delta S = 8p + p^2\pi - 4p^2 \quad (5)$$

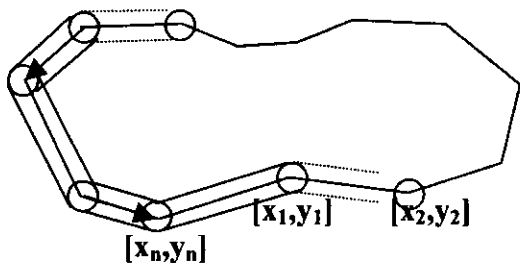


Obr. 1 Oblasti okolo hranice areálu tvaru: a – kruhu, b – obdĺžnika, c – štvorca

V práci [2] sa autor venuje rôznym spôsobom polozenia kruhového pera na hranicu areálu a vplyvu tohto polozenia na presnosť grafického vyjadrenia areálu. Vzhľadom na súvislosť hrúbky kruhového pera a maximálnej prípustnej odchýlky sme obsah oblasti spoľahlivosti hranice areálu analyzovali pri polohe stredu kresliaceho pera na hranici areálu.

Areál ohraničený všeobecným n-uhľom (obr. 2), ktorého vrcholy majú súradnice  $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ , má index kompaktnosti:

$$I_k = 2\pi \frac{|(x_1 - x_n)(y_1 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)|}{(\sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2})^2} \quad (6)$$



Obr. 2 Areál ohraničený všeobecným n-uhľom

Oblasť spoľahlivosti hranice obsahuje vo vrcholoch areálov kruhové výseky a deltoidy. Obsah  $\Delta S$  oblasti spoľahlivosti počítame ako:

$$\Delta S = 2p \text{ obvod} + \text{obsah výsekov} - \text{obsah deltoidov}$$

Uhly na hranici areálu môžu byť konvexné a nekonvexné. Detaily hranice spoľahlivosti vo vrcholoch s konvexným a nekonvexným uhlom ukazuje obr. 3 a, b,. Spôsob výpočtu obsahov výsekov a deltoidov je iný pre konvexný, iný pre nekonvexný vnútorný uhol areálu.

Ak  $\alpha_i$  je **konvexný uhol**, potom obsah výseku v rohu oblasti vypočítame zo vzťahu:

$$S_{\text{Výseky konvexných}} = \frac{p^2}{2} \sum_{i=1}^k (\pi - \alpha_i) \quad (7)$$

Obsah deltoidu vo vrchole s konvexným uhlom vypočítame zo vzťahu:

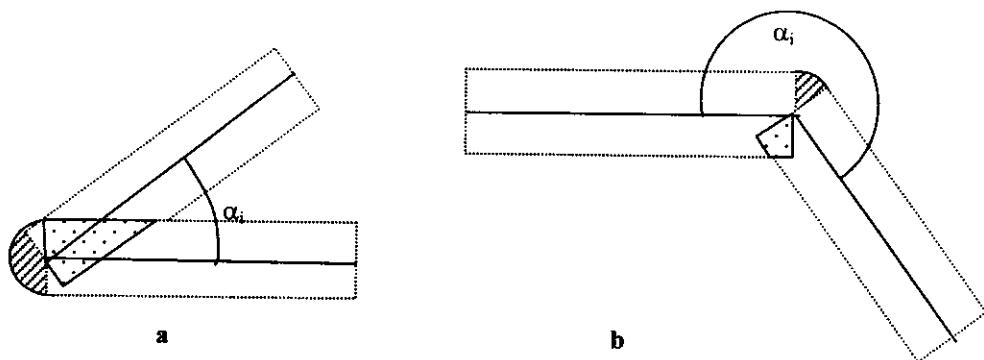
$$S_{\text{Deltoidy konvexných}} = p^2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lg \frac{\alpha_i}{2}} \quad (8)$$

Ak  $\alpha_i$  je **nekonvexný uhol**, potom obsah výseku vypočítame:

$$S_{\text{Výseky nekonvexných}} = \frac{p^2}{2} \sum_{i=1}^{nk} (\alpha_i - \pi) \quad (9)$$

Obsah deltoidu vo vrchole s nekonvexným uhlom vypočítame:

$$S_{\text{Deltoidy nekonvexných}} = p^2 \sum_{i=1}^{nk} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i - \pi}{2}} \quad (10)$$



Obr. 3 Časti oblasti spoľahlivosti hranice areálu vo vrchole a – s konvexným, b – s nekonvexným vnútorným uhlom

### Analýza presnosti obsahov z hľadiska kompaktnosti areálu

Pri analýze závislosti obsahu oblasti spoľahlivosti hranice od indexu kompaktnosti sme použili areály s obsahom  $S = 1$ . Obsah oblasti spoľahlivosti  $\Delta S$  sme počítali pre geometrické objekty vopred zvoleného tvaru (napr. kruh, ovál, štvorec, obdĺžniky a i.), tiež pre reálne areály experimentálneho územia, ohraničené všeobecným  $n$ -uholníkom. Vrcholy hranice každého experimentálneho územia sme transformovali v homotétii so stredom v začiatku súradnicovej sústavy a s koeficientom:

$$k = \frac{1}{\sqrt{S}}.$$

Na výpočet obsahov oblastí spoľahlivosti areálov sme použili rovnakú polohovú odchýlku  $p$ . Areálom s dierami, prípadne areálom pozostávajúcim z viacerých neprekrývajúcich častí, nebola v tejto časti venovaná zvláštna pozornosť, pretože ich index kompaktnosti je tiež v intervale  $(0, 1)$ , (ako u použitých areálov), teda ich vstup do výpočtu by neovplyvnil výsledok.

Výpočet obsahu oblasti spoľahlivosti areálu sme realizovali v prostredí programového systému *Mathematica for Windows*. V rámci analýzy boli vypracované programy [5] pomocou programovacieho jazyka tohto prostredia a niektorých jeho štandardných funkcií.

Tab. 1 obsahuje hodnoty obsahu, obvodu, indexu kompaktnosti a obsah oblasti krajnej odchýlky rôznych areálov, ukazuje, že obsah tejto oblasti je tým väčší, čím je menší index kompaktnosti areálu.

V tabuľke uvádzame obvody a obsahy pôvodných experimentálnych areálov krajnej pokrývky lesov v oblasti východoslovenskej nížiny. Vstupné dáta v štyroch mierkových rozlíšeníach boli získané: zo základnej mapy 1:10 000 (ZM10), zo ZM50, z dát projektu CORINE Land Cover (Corine) [4] a dát získaných z najpodrobnejšej lesníckej mapy Lesoprojektu Prešov. Obsah oblasti spoľahlivosti areálov sme počítali pre ich homotetické obrazy s obsahom  $S = 1$ .

Vzťah závislosti indexu kompaktnosti a obsahu oblasti spoľahlivosti hranice možno vyjadriť regresnou funkciou vypočítanou metódou najmenších štvorcov v štatistickom prostredí systému *Mathematica* [3, 5].

Výpis o výsledkoch výpočtu parametrov regresnej funkcie je za tab. 1:

**Tab. 1 Výsledky výpočtov obsahu, obvodu, indexu kompaktnosti a oblasti spoľahlivosti hranice pre vybranú množinu areálov**

Areály	Obsah [m <sup>2</sup> ]	Obvod [m]	Index kompaktnosti	Obsah oblasti spoľahlivosti [m <sup>2</sup> ] pre $\rho=0,01m$ , $S=1 m^2$
ZM 50	351781	3152	0,444942	0,115378
ZM 50/1	296248	3341	0,333395	0,121444
ZM 50/3	341585	2954	0,491619	0,099771
ZM 50/5	984394	4314	0,664574	0,087068
ZM 50/6	592410	3603	0,573472	0,093956
ZM 10	526445	3934	0,427457	0,122113
ZM 10/1	304628	3367	0,337585	0,121204
ZM 10/3	497244	3283	0,57965	0,092793
ZM 10/5	1034740	4639	0,604109	0,091516
ZM 10/6	463683	3929	0,377358	0,113037
CORINE	387894	3106	0,504981	0,116161
CORINE/1	273847	2344	0,62592	0,090268
CORINE/3	376821	2981	0,532645	0,097600
CORINE/5	952455	4651	0,553151	0,095139
CORINE/6	588567	3436	0,626291	0,089352
lesoprojekt	412082	3486	0,425919	0,121679
kruh	1	3,54491	1	0,070898
štvorec	1	4	0,785398	0,079914
ovál	1	3,84796	0,848691	0,076959
obdĺžnik/1	1	5	0,502655	0,100214
obdĺžnik/2	1	6,666667	0,282743	0,133547
obdĺžnik/3	1	8,5	0,173929	0,170214
obdĺžnik/4	1	10,4	0,116183	0,208214
obdĺžnik/5	1	12,3333	0,0826131	0,246881
obdĺžnik/6	1	14,2857	0,0615752	0,285928

`regres = Regress[d1, {1, 1/Sqrt[x]}, x, OutputList -> {ConfidenceIntervalTable, BestFit}]`

	Estimate	SE	CI
{ParameterCITable -> 1}	-0.000255476	0.000366302	{-0.00102216, 0.000511203}
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.070979	0.000189626	{0.0705821, 0.0713759}

BestFit ->  $-0.000255476 + \frac{0.070979}{\sqrt{x}}$

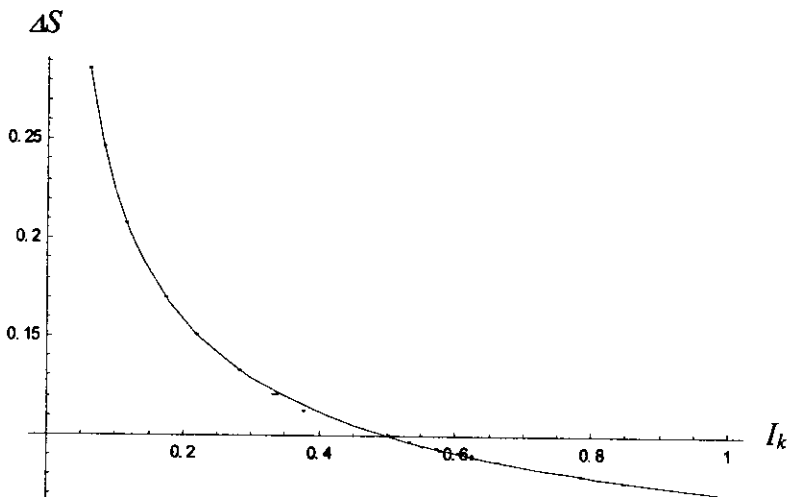
	Estimate	SE	TStat	PValue
ParameterTable -> 1	-0.000255476	0.000366302	-0.697447	0.49397
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0.070979	0.000189626	374.31	0.

RSquared -> 0.999864, AdjustedRSquared -> 0.999857, EstimatedVariance ->  $4.79681 \times 10^{-7}$ ,

	DF	SumOfSq	MeanSq	FRatio	PValue
ANOVA Table -> Model	1	0.0672072	0.0672072	140108.	0.
Error	19	$9.11393 \times 10^{-6}$	$4.79681 \times 10^{-7}$		
Total	20	0.0672163			

Podrobnejšia charakteristika opisu jednotlivých parametrov a prvkov výpisu sa nachádza v prácach [3, 5].

Grafické znázornenie odhadovanej regresnej funkcie je na obr. 4.



Obr. 4 Graf regresnej funkcie pre  $p = 0,01$

V súvislosti so vzťahmi na výpočet obsahu oblasti krajnej odchýlky sa ako vhodná regresná funkcia ukázala funkcia s absolútnym členom a lomeným členom s odmocninou z  $x$ , ktorej hodnota koeficientu determinácie bola blízka 1. Pre polohovú odchýlku  $p = 0,01$  má odhadovaná regresná funkcia tvar:

$$f(x) = -0,000255476 + \frac{0,070979}{\sqrt{x}}$$

Vzhľadom na to, že obsah oblasti spoľahlivosti závisí od veľkosti krajnej odchýlky, bola urobená rovnaká analýza pre jej ďalšie hodnoty, a to:  $p = \{0.01, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.1\}$ .

Regresné funkcie závislosti indexu kompaktnosti a obsahu oblasti spoľahlivosti hranice majú všeobecný tvar:

$$f(x) = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{x}}$$

Hodnoty parametrov  $a_1, a_2$  pre rôzne  $p$  (polohové odchýlky bodu) vyjadruje tabuľka 2.

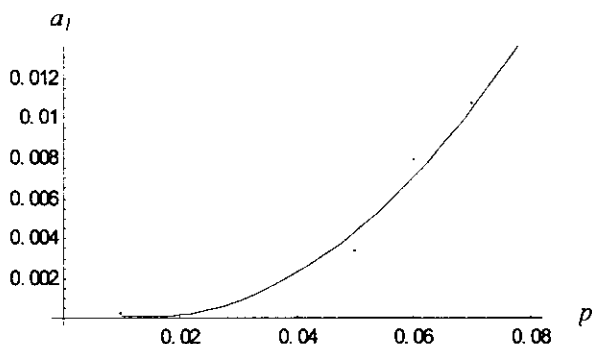
**Tab. 2 Hodnoty parametrov  $a_1, a_2$  regresných funkcií**

$p$	$a_1$	$a_2$
0,01	0,000255476	0,070979
0,05	0,00339533	0,35462
0,06	0,00791308	0,423392
0,07	0,0107723	0,493567
0,08	0,0140662	0,563636
0,1	-0,101226	0,755446

Závislosť polohovej odchýlky a parametra  $a_1$  možno vyjadriť regresnou funkciou v tvare:

$$g(x) = 0.000812297 - 0.0981665 x + 3.36262 x^2$$

čo potvrdzuje kvadratickú závislosť s koeficientom determinácie 0,9843. Grafické znázornenie tejto funkcie je na obr.5.



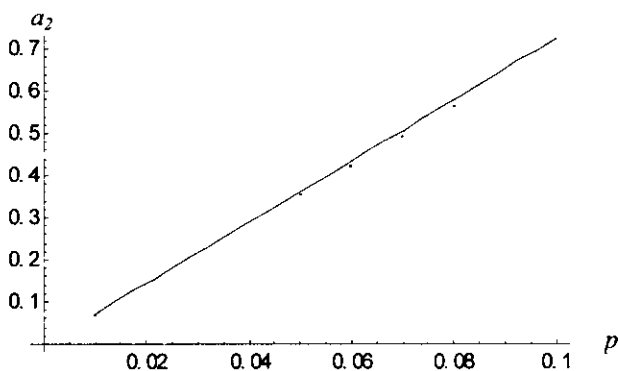
Obr. 5 Graf regresnej funkcie závislosti polohovej odchýlky  $p$  a absolútneho člena  $a_1$  odhadovaných regresných funkcií

Závislosť polohovej odchýlky a parametra  $a_2$  možno vyjadriť funkciou:

$$g_2 = 7.23744x,$$

čo potvrdzuje lineárnu závislosť s koeficientom determinácie 0,994924.

Grafické znázornenie tejto funkcie je na obr. 6.



Obr. 6 Graf regresnej funkcie závislosti polohovej odchýlky a člena  $a_2$

### Spol'ahlivosť vyjadrenia areálu v digitálnom tvare

Zohľadnenie vplyvu veľkosti polohovej odchýlky hranice areálu a tvaru areálu na presnosť vyjadrenia areálu s obsahom  $S = 1$  v digitálnom tvare vyjadruje priestorová funkcia:

$$f(x, y) = \pi y^2 - 4y^2 + \frac{4y\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \quad (11)$$

kde  $f(x, y)$  je obsah oblasti spol'ahlivosti areálu  $\Delta S$ ,

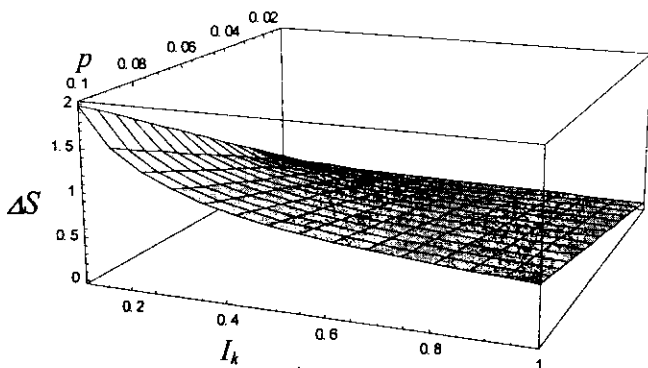
$x$  je index kompaktnosti  $I_k$  areálu,

$y$  je  $p$  – prípustná polohová odchýlka bodu (na grafických podkladoch hrúbka čiary, teda polomer kruhového pera).

Absolútny člen je rozdiel obsahov výsekov a deltooidov obdĺžnika a člen pri  $1/\sqrt{x}$  je obsah oblasti spoľahlivosti kruhu. Tento vzťah možno efektívne použiť na približný výpočet oblasti spoľahlivosti členitého nekonvexného areálu.

Geometrická interpretácia funkcie (11) je plocha v priestore  $[x = I_k, y = p, z = \Delta S]$ ,

kde  $I_k$  a  $p$  sú nezávislé premenné (obr. 7).



Obr. 7 Graf regresnej funkcie závislosti nepresnosti obsahu areálu od prípustnej polohovej odchýlky a tvaru areálu (indexu kompaktnosti)

Pre areály s obsahom  $S \neq 1$  je vyjadrenie funkcie (11) v tvare:

$$f(x, y) = \pi y^2 - 4y^2 + \frac{4y\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \sqrt{S} \quad (12)$$

Za kritérium spoľahlivosti, nepresnosti obsahu na jednotku obsahu sa považuje funkcia (11) a pre areály s obsahom  $S \neq 1$  funkcia (12). Obidve funkcie zohľadňujú vplyv tvaru areálu, hrúbky čiary grafického vyjadrenia a krajnej polohovej odchýlky na nepresnosť obsahu areálu. Napríklad obdĺžnik 4 z tab. 1 má rozmery 0,2 x 5 m, jeho index kompaktnosti je  $I_k$  0,12 a obsah oblasti spoľahlivosti je  $\Delta S$  0,21 m<sup>2</sup>. Ak zväčšíme jeho obsah 100-krát, jeho rozmery budú 2 x 50 m, pri tej istej krajnej polohovej odchýlke hranice je jeho  $\Delta S$  2,1 m<sup>2</sup>.

### Záver

Analýzy presnosti obsahu areálu podľa rôznych kritérií vplyvu viedli k formulovaniu matematického modelu korelácie tvaru areálu, krajnej polohovej odchýlky bodu a spoľahlivosti vyjadrenia jeho hranice, ktorá zohľadňuje aj tvar (kompaktnosť) areálu. Predpis na efektívny odhad možnej nepresnosti obsahu areálu určitého tvaru môže sa chápať ako predpis, ktorý vyjadruje spoľahlivosť obsahu ovplyvnený hrúbkou čiary grafického vyjadrenia hranice, ako aj nepresnosťou určenia bodov hranice v rámci prípustnej odchýlky. Predpis sa dá použiť pri digitalizácii priestorových údajov z grafických podkladov, pri digitalizácii hraníc objektov, napr. zo starých katastrálnych máp alebo pri aktualizácii bázy priestorových dát v softvérovom a legislatívnom prostredí.

Pri tvorbe, prevode a aktualizácii priestorových dát areálov krajiny pokrývky (napr. lesa) treba tiež brať do úvahy tvar areálu, teda jeho index kompaktnosti. Pri aktualizácii bázy dát ostáva



problém prirodzeného rozširovania lesa v súvislosti s obsahom oblasti spoľahlivosti, ktorým sa dá určiť aktuálny obsah napr. podľa vzťahu (12).

## Literatúra

- [1] Husár, K. (2000). Tvar areálov na príklade krajinej pokrývky Slovenska. *Kartografické listy*, 8, s. 91–98.
- [2] Husár, K. (1995). Výplne a plošné obsahy areálov. *Kartografické listy*, 3, s. 35–44.
- [3] Sherlock, T. W. (1993). *MATHEMATICA – a system for doing mathematics by computer*, Cambridge (Wolfram Research, Inc.).
- [4] Vajsáblová, M. (1999). Analýza presnosti vyjadrenia obsahu (výmery) areálov krajinej pokrývky. *Pedagogické listy*, 6, s. 145–152.
- [5] Vajsáblová, M. (2001). *Priestorový model územia*. Dizertačná práca. Bratislava (Stavebná fakulta Slovenskej technickej univerzity).

## S u m m a r y

### Influence of the Shape on Reliability of Area Value

The shape of landscape regions has an influence on their using and on possible inaccuracy. The main object of our paper is analysis of the influence of the shape of area with maximal admissible error at a boundary point (or of the size of the circular - shape drawing pen) on the reliability of area values.

The reliability of area is characterised by area value of the region of reliability and the shape of landscape regions is characterised by the index of compatibility. These quantities were calculated for selected landscape regions with several maximal admissible errors at a point. Some of the relations for computation of them were defined.

Our examination of correlation of shape (index of compatibility) and maximal admissible error at a point (the size of the circular shape drawing pen) resulted in a construction of the corresponding regression function. Applications of our results are expected in map digitalisation and in actualisation of spatial computer databases.

Tab. 1 Area value, perimeter, the index of compatibility and area value of the region of reliability of selected areas.

Tab. 2 Values of parameters  $a_1$ ,  $a_2$  of regress functions.

Fig. 1 Regions around boundary of area: a, circle, b, rectangle, c, square.

Fig. 2 Region of reliability of boundary of polygon area.

Fig. 3 Part of the region of reliability in vertices with a – convex internal angle, b – non-convex internal angle.

Fig. 4 Graph of regress function for  $p = 0,01$ .

Fig. 5 Graph of regress function of dependence of maximal admissible errors  $p$  and absolute parameter  $a_1$  of estimated regress functions.

Fig. 6 Graph of regress function of dependence of maximal admissible errors  $p$  and parameter  $a_2$  of estimated regress functions.

Fig. 7 Graph of regress function of dependence of reliability of area value of maximal admissible errors and of the shape (index of compatibility).

**Lektoroval**

**RNDr. Karol HUSÁR, CSc.,**

**Geografický ústav Slovenskej akadémie vied, Bratislava**