

Petr SOUKUP, Michal VOTOČEK

KONSTRUKCE PŘÍMKOVÉ KOSTRY PLOCHY A JEJÍ VYUŽITÍ V KARTOGRAFII

Soukup, P., Votoček, M.: Construction of the Straight Skeleton Surface and Its Use in Cartography. Kartografické listy 2003, 11, 3 figs., 5 refs.

Abstract: Straight skeleton is a simply structure describing the shape of a polygon. It is defined by shrinking process of the polygon boundary. It could be used for automatic label placement, finding proper method of area filling and for generalization of the polygon.

Keywords: Straight skeleton, medial axis, digital cartography.

Úvod

Plocha je v kontextu s tématem článku obvykle chápána jako část roviny ohraničená uzavřeným polygonem. Kostra plochy je jednoduchá geometrická struktura, která charakterizuje tvar plochy, přesněji její topologické vlastnosti. Jako kostra plochy se obvykle používala tzv. střední osa plochy (*medial axis*), která je definovaná jako množina středů kružnic, které leží uvnitř plochy a dotýkají se nejméně dvou různých hran obvodového polygonu. Střední osa plochy je tvořena úsečkami, pouze v okolí reflexních vrcholů (vrcholy s vnitřním úhlem větším než π) bude parabolicky zakřivena. Parabolické zakřivení střední osy vyplývá již z definice paraboly, což je množina bodů, které mají od zadaného bodu (*reflexní vrchol*) a zadané přímky (protilehlá hrana obvodového polygonu) stejnou vzdálenost.

Aichholzer a kol. [1] popsali novou geometrickou strukturu, přímkovou kostru plochy (*straight skeleton*, též *Angular Bisector Network*). Přímková kostra se skládá pouze z úseček, které leží na osách úhlů sevřených hranami obvodového polygonu. U konvexních ploch přímková kostra zcela splývá se střední osou, u ostatních polygonů se její průběh liší od střední osy právě absencí parabolických oblouků. Druhý rozdíl mezi oběma strukturami je ve způsobu jejich definice: přímková kostra není definována pomocí vzdálenosti, ale jako výsledek smršťovacího procesu.

Během smršťování se hranice plochy stahuje dovnitř, při čemž se vrcholy obvodového polygonu posunují po osách úhlů. Všechny hrany obvodového polygonu se pohybují stejnou rychlostí a mohou se v průběhu toho procesu zmenšovat i zvětšovat. Takto se postupuje až do okamžiku, kdy dojde k jedné z následujících změn obvodového polygonu:

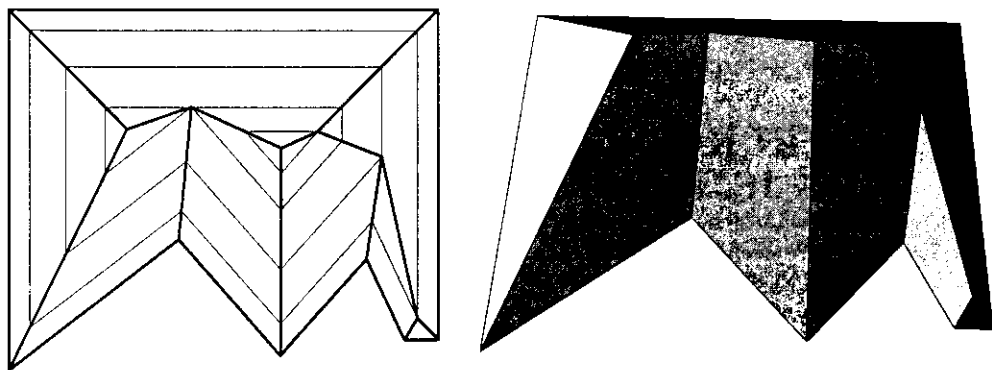
- událost hrany, kdy se nějaká hrana zmenší až na nulovou délku, a
- událost rozdělení, kdy reflexní vrchol protne protilehlou hranu a rozdělí obvodový polygon na dva subpolygony.

V obou typech událostí dojde ke vzniku jednoho nebo dvou nových polygonů, jejichž hrany jsou rovnoběžné s hranami původních polygonů. Jestliže takto vzniklé polygony mají nenulový obsah, proces smršťování pokračuje a tyto polygony se stahují dále dovnitř. Přímková kostra vznikne z části os úhlů, po kterých se při smršťování polygonu pohybovaly vrcholy polygonů. Proces smršťování spolu s odpovídající přímkovou kostrou je patrný na obrázku 1a.

Plochu a její přímkovou kostru lze zajímavě prostorově interpretovat. Pokud si představíme hranici plochy jako půdorys budovy, pak přímková kostra plochy je půdorysem takové střechy této budovy, jejíž všechny střešní roviny mají stejný spád. Ukázka takové střešní konstrukce je na obrázku 1b.

Ing. Petr SOUKUP, PhD, Katedra mapování a kartografie ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: soukup@fsv.cvut.cz

Ing. Michal VOTOČEK, Karpatská 19, 100 00 Praha 10, e-mail: votocek@gama.fsv.cvut.cz



Obr. 1 Přímková kostra: a) smršťování polygonu, b) střešní konstrukce

Výpočet přímkové kostry plochy

Výpočet přímkové kostry je založen na její definici, tedy na plynulém smršťování obvodového polygonu. Naštěstí není nutné sledovat celý průběh smršťování, ale stačí ohlídat situace, kdy se mění topologie polygonu: událost hrany a událost rozdělení. Tyto situace nastávají v definovaném pořadí, které je jednoznačně určeno tvarem plochy, a proto se při algoritmizaci hledání přímkové kostry přímo nabízí využít prioritní frontu (*priority queue*). Algoritmus pak zpracuje první událost fronty, změní obvodový polygon a uloží části os úhlů (které jsou součástí přímkové kostry), aktualizuje prioritní frontu a přejde k další události. Tento postup opakuje dokud se nezpracuje celá fronta. Například při smršťování polygonu na obrázku 1a nejprve proběhnou dvě události hrany (zaniknou dvě hrany, shodou okolností ty nejkratší), poté dojde k události rozdělení (zbývající reflexní vrchol protne horní hranu), pokračuje událost hrany (zanikne pravá svislá hrana), následuje špička střechy v levém subpolygonu, který tímto zanikne a na závěr zbývá špička střechy pravého subpolygonu.

Algoritmus pro výpočet přímkové kostry podrobně zkoumali Felkel a Obdržálek [3]. Zjistili, že při zpracování události není nutné měnit celý obvodový polygon, ale postačí změnit vrcholy, kterých se událost přímo dotýká. Pro uložení vrcholů obvodového polygonu použili uzavřený oboustranný spojový seznam, ze kterého při události hrany vypustí jeden z vrcholů smršťované hrany. Při události rozdělení tento seznam rozdělí na dva samostatné uzavřené seznamy, které odpovídají dvěma subpolygonům, které při této události vzniknou.

Kupodivu nejobtížnější částí algoritmu je přiřadit reflexním vrcholům správné protilehlé hrany, tedy hrany, které při smršťování protnou. Nemusí se vždy jednat o hranu, kterou protíná osa úhlu na reflexním vrcholu. Zajímavá je také situace, kdy jednu hranu protne postupně více reflexních vrcholů a mohlo by snadno dojít k chybě při rozdělování polygonu. Ošetření obou problémů není úplně triviální, ale je podrobně popsáno v [3].

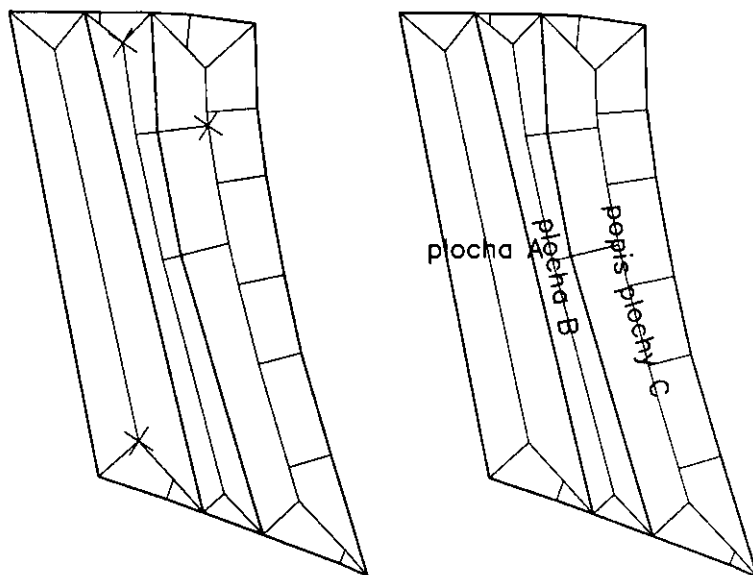
Ještě je možné zmínit se, že tento algoritmus pracuje také s děravými plochami, pokud vnitřní polygony (díry) mají opačnou orientaci než obvodový (vnější) polygon plochy. Hledání kostry děravé plochy se liší pouze tím, že vnitřní polygony se budou místo smršťování roztahovat a jejich vrcholy budou uloženy v samostatných spojových seznamech, které se během smršťovacího procesu mohou kromě rozdělování i spojovat.

Definiční bod plochy

Definičním bodem plochy může být libovolný bod uvnitř plochy. Takový bod lze najít pomocí mnohem jednoduššího algoritmu než je výpočet přímkové kostry. Jiná situace nastává tehdy, když se definiční bod použije pro umístění popisu plochy. Příkladem může být katastrální mapa, ve které se do definičních bodů parcel umísťují parcelní čísla. Takový bod musí splňovat další kritéria a jeho nalezení bývá mnohem komplikovanější.

Popis plochy by měl být umístěn nejlépe v optickém středu plochy nebo v jeho bezprostředním okolí, ale zároveň v takovém místě, aby bylo zřejmé, ke které ploše se tento popis váže. Popis by také neměl překrývat obvodový polygon plochy ani popis jiné plochy.

Všechny body přímkové kostry leží uvnitř plochy nebo na jejím obvodu, navíc u každého bodu lze zjistit jeho vzdálenost od obvodového polygonu. Nabízí se zde možnost umístit popis plochy do bodu, jehož vzdálenost od obvodu je největší. Při praktickém použití se ovšem ukázalo, že takto zvolený bod nelze akceptovat, neboť v mnoha případech bude ležet zcela mimo optický střed plochy (viz obrázek 2a).



Obr. 2 Využití přímkové kostry pro definiční bod plochy:
a) body přímkové kostry s největší vzdáleností od obvodového polygonu,
b) stočení popisu plochy podle přímkové kostry

Přímková kostra sice nedokáže najít bod v optickém středu plochy, ale přesto se může uplatnit v případech, kdy klasické metody pro umístění popisu plochy selhávají. Typickým příkladem jsou úzké plochy (např. vodní toky, cesty), u kterých vodorovně umístěný popis zpravidla protíná jejich obvod, ale při vhodném natočení může ležet celý uvnitř. Sklon popisu lze velmi snadno odvodit ze sklonu nejbližších hran. Praktická ukázka je na obrázku 2b: vodorovný popis (plocha A) přesahuje obvod, ale po stočení je celý popis uvnitř (plocha B). Dlouhý popis (typicky název vodního toku) lze nalámat na jednotlivá slova (nebo písmena) a pro každé slovo, resp. písmeno použít jiné stočení (viz plocha C).

Volba vhodné výplně plochy

Výplň plochy umožňuje zobrazit určité vlastnosti nebo jevy, které se vztahují k dané ploše. Při zobrazování těchto vlastností a jevů hraje důležitou roli celkový počet různých výplní ploch, které budou použity. Pro několik málo různých výplní vystačí prosté vybarvení plochy, k rozlišení většího množství ploch se využívá šrafování plochy, lemování obvodu plochy nebo výplň plochy vzorem (texturou, grafickým symbolem).

Vhodnost použití konkrétního způsobu zvýraznění plochy závisí na velikosti této plochy a na jejím tvaru. Prosté vybarvení plochy je použitelné na plochy všech tvarů a velikostí. Šrafování plochy se nehodí pro extrémně malé plochy a pro plochy s velmi komplikovaným tvarem. U příliš velkých ploch působí šrafy a obecně jakýkoliv vzor poněkud rušivě. Úzké plochy je možné vyšrafovat, ale je nutné, aby zvolený sklon šraf byl přibližně ve směru kratšího (úzkého) rozměru plochy, tedy aby plocha obsahovala mnoho krátkých šraf. Pokud by sklon šraf odpovídal směru

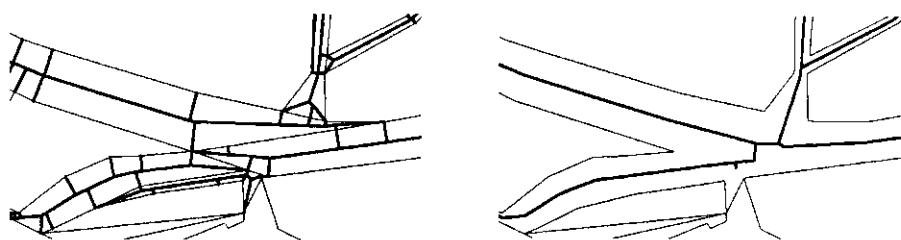
delšího rozměru úzké plochy, plocha by obsahovala několik málo delších šraf, které by pravděpodobně vůbec nevystihovaly tvar plochy. Lemování obvodu plochy je vhodné pro středně velké a větší plochy (včetně extrémně velkých ploch), naopak je nepoužitelné pro malé nebo úzké plochy. Výplň vzorem vyžaduje střední nebo větší plochu, jejíž tvar není příliš složitý. Rozhodně se nehodí pro úzké plochy, u velmi velkých ploch může působit rušivě.

Při výběru vhodných výplní ploch je tedy třeba detekovat úzké plochy a plochy, jejichž tvar je velmi komplikovaný. Algoritmus popsáný v [5] zjišťuje tvar ploch pomocí různě stočených opsaných obdélníků, ze kterých vybere nejúžší obdélník a testuje délku kratší strany obdélníka a poměr obsahu obdélníka ku obsahu plochy. Tento algoritmus je velmi jednoduchý, ale jeho rozlišovací schopnosti jsou omezené. Například u plochy tvaru písmene L může detekovat složitý tvar, naopak tvar Norska považuje za jednoduchý, neboť výměra norských fjordů je řádově menší než výměra celého Norska. Zde se nabízí prostor pro přímkovou kostru, která by mohla zjistit tvar plochy mnohem přesněji.

Přímková kostra převádí plochu na rovinný graf, který se při zjišťování tvaru plochy analyzuje. Taková analýza je pochopitelně mnohem komplikovanější než výše zmíněné testy opsaných obdélníků. Dosud se však nepodařilo najít takový postup, který by bezpečně rozpoznal tvar plochy a umožnil tak zvolit vhodný způsob jejího vyplnění.

Generalizace ploch

Kartografická generalizace představuje jeden z nejsložitějších a nejkompaktnějších problémů tvorby map. Přímková kostra by se mohla uplatnit u generalizace ploch, které zobrazují liniový objekt (např. silnici, cestu, vodní tok). Tyto plochy jsou při generalizaci nahrazovány liniovým prvkem, zpravidla nějakou střední osou, která vystihuje jejich průběh.



Obr. 3 Generalizace ploch cest:

- a) střední konstrukce jednotlivých ploch,
- b) hřbet střechy (tj. přímková kostra bez úseček vycházejících z vrcholů obvodového polygonu) sloučené plochy

Generalizace plochy vyžaduje důležitý zásah do algoritmu konstrukce přímkové kostry plochy. Jak je patrné z obrázku 3a, celá přímková kostra jednotlivých ploch je pro generalizaci nepoužitelná, protože je mnohdy ještě složitější než výchozí plocha. Je tedy vhodné uvažovat pouze ty části kostry, které určují tvar a směr liniového prvku, a ostatní části zanedbat. Výběr významných částí kostry se řeší zanedbáním úseček, které vycházejí z vrcholů obvodového polygonu, nebo případně těch úseček, jejichž koncový bod leží v blízkém okolí obvodu polygonu. Uvedený postup lze chápat i tak, že se použije pouze hřeben střední konstrukce. Druhý problém při generalizaci sousedních ploch představuje plynulé napojení výsledných linií, které se zatím nedaří jednoduše ošetřit. Je možno postupovat tak, že se všechny sousední generalizované plochy před konstrukcí kostry sloučí. Výsledek takové generalizace je na obrázku 3b.

Ještě je možné zmínit, že podobný problém řešili McAllister a Snoeying [4] při generalizaci říční sítě v Britské Kolumbii (kanadská provincie na západním pobřeží). Použili ovšem střední osu plochy, o které uvádí, že její výpočet je poměrně obtížný, a proto zkoušeli použít její aproximaci. Plochu vodního toku pokryli trojúhelníky Delauného triangulace a pro střední osu použili postupně spojnice těžišť trojúhelníků, hrany Voroného diagramu i jinak definované body uvnitř trojúhelníků, ale výsledná čára vždy více či méně oscilovala mezi oběma břehy.

Závěr

Přímková kostra plochy představuje relativně novou geometrickou strukturu, která se teprve začíná uplatňovat v různých úlohách, které pracují s tvarem plochy. V tomto článku jsme se pokusili nastínit možné využití přímkové kostry v digitální kartografii. Z příbuzných oborů je známá aplikace přímkové kostry pro tvorbu střešní konstrukce, která se mimo jiné využívá pro konstrukci 3D modelů měst s využitím kombinace leteckých snímků a stávající mapy (viz [2]).

Článek byl zpracován s podporou výzkumného záměru MSM 210000007 – Komplexní inovace technologií v geodézii a kartografii.

Literatura

- [1] AICHHOLZER, O., ALBERTS, D., AURENHAMMER, F., GÄRTNER, B. (1995). A Novel Type of Skeleton for Polygons. *Journal of Universal Computer Science*, 1(12), s. 752–761.
- [2] BRENNER, C. (2000). Towards Fully Automatic Generation of City Models. In *International Achieves of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. 3. Amsterdam.
- [3] FELKEL, P., OBRŽÁLEK, Š. (1998). Straight Skeleton Implementation. In *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics*. Budmerice.
- [4] McALLISTER, M., SNOEYING, J. (2000). Medial Axis Generalization of River Networks. *CaGIS*, 27 (2), s. 129–138.
- [5] VOTOČEK, M. (2001). Kvalitativní vyplňování ploch při tvorbě vlastnické mapy. In *Sborník 14. kartografické konference*. Plzeň.

S u m m a r y

Construction of the Straight Skeleton Surface and Its Use in Cartography

Straight skeleton is new geometric structure for simple polygon made up of straight line segments, which are pieces of angular bisectors of polygon edges. Polygon edges are moving in constant speed inward the polygon and changing their lengths. There are two types of events which change the topology of the shrinking polygon: edge events, when the edge shrinks to zero, and split events, when a reflex vertex runs to opposite edge and split it. The basic data structures of the straight skeleton implementation are a set of circular list of active vertices and a priority queue of the events.

Polygon centroids, label placement, choosing of a proper area filling method and generalization of the polygon are tasks of digital cartography that are based on the shape of the polygon. Straight skeleton can be applied for finding orientation of polygon label (especially in a narrow polygon) and for generalization of polygons, which represent some line entity (e.g. rivers, roads). Skeleton is not suitable for calculation of polygon centroid. As for area filling it is still not clear how the skeleton could help.

Fig. 1. Straight skeleton: a) shrinking process, b) roof model.

Fig. 2. Centroids made using straight skeleton: a) points of straight skeleton with maximal distance from boundary polygon, b) label orientation according to straight skeleton.

Fig. 3. Polygon generalization: a) straight skeletons of each polygon, b) roof ridge (straight skeleton without edges containing any vertex of boundary polygon) of merge polygons.

Lektorovala:

RNDr. Margita Vajsáblová, PhD.,
Stavební fakulta STU, Bratislava