

Katarína MÉSZÁROSOVÁ, Margita VAJSÁBLOVÁ, Peter ŠVANTNER

KVANTITATÍVNE VYJADRENIE ČLENITOSTI KRAJINY FRAKTÁLNOU DIMENZIOU

Mészárosová, K., Vajsáblová, M., Švantner, P.: Quantitative expression of terrain roughness by fractal dimension. Kartografické listy 2011, 19, 11 figs., 2 tabs., 10 refs.

Abstract: The contribution discusses the quantitative description of terrain roughness by using methods of the fractal geometry. The vertical and horizontal components of the area are considered in its fractal dimension. To gain the fractal dimension, the box-counting method has been applied. Taking the fractal dimension into account can be useful in the basic terrain typology.

Keywords: georelief, terrain roughness, fractal dimension, box-counting method

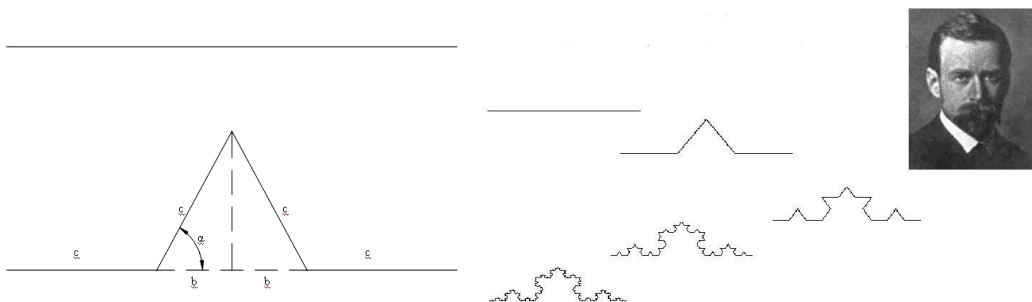
Úvod

Krajina chápaná ako komplexný systém je predmetom záujmu rôznych vedeckých oblastí a záujmových skupín. Dôkladné poznanie a popis krajiny prekračuje možnosti jedného vedného odboru. Prínosom pre všetky zainteresované oblasti je ich spolupráca. Problematika merania a zobrazovania zemského povrchu je od počiatku geometrie jednou z jej najdôležitejších a stále aktuálnych úloh. Fraktálna geometria, ako najmladšia oblasť geometrie, prináša nové pohľady na „staré“ problémy a mohla by prispieť aj k téme typológie krajiny kvantitatívnym vyjadrením členitosti reliéfu. Z hľadiska kartografického modelovania prvkov krajiny opíšeme fraktálnu dimenziu čiarových elementov, teda kriviek, a tiež výpočet fraktálnej dimenzie pre model reliéfu (Mészárosová, 2011).

1. Fraktálna dimenzia krajinných prvkov

1.1 Fraktálna dimezia krivky

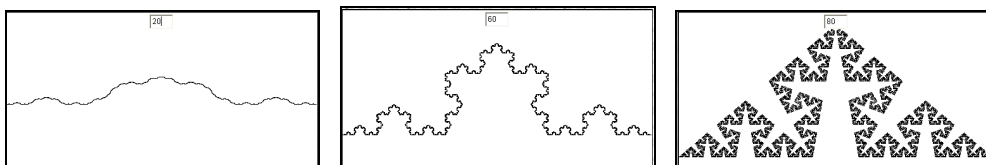
Pre intuitívne pochopenie súvislosti fraktálnej dimenzie a členitosti krivky uvádzame príklad populárnej krivky, ktorú v roku 1904 vytvoril Niels Fabian Helge von Koch. Na obr. 1 sú prvé 4 iterácie generovania Kochovej krivky pre uhol $\alpha = 60^\circ$. Nekonečný počet iterácií je nevyhnutnou podmienkou existencie fraktálu. V konečnom kroku ide len o veľmi členitú krivku, ale konečnej dĺžky.



Obr. 1 Generátor Kochovej krivky (vľavo), prvé 4 iterácie Kochovej krivky pre $\alpha = 60^\circ$ (vpravo)

RNDr. Katarína MÉSZÁROSOVÁ, PhD., RNDr. Margita VAJSÁBLOVÁ, PhD., Bc. Peter ŠVANTNER, Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta, Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, e-mail: margita.vajsablova@stuba.sk, katarina.mesarosova@stuba.sk, xsvantnerp1@stuba.sk

Porovnajme tri prípady Kochovej krivky pre $\alpha = 20^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 80^\circ$. Už pri malom počte iterácií je zrejmé (obr. 2), že so vzrastajúcim uhlom α vzrastá aj členitosť krivky a jej „schopnosť vyplňať plochu“. Túto vlastnosť fraktálu charakterizuje fraktálna dimenzia D .



Obr. 2 Kochova krivka (i-ta iterácia pre uhol $\alpha = 20^\circ$; $\alpha = 60^\circ$; $\alpha = 80^\circ$) (Kováč, 2009)

Množinu F nazývame samopodobnou, ak existuje konečný počet kontraktívnych zobrazení:

$$f_i: E_n \rightarrow E_n \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (m \geq 2) \text{ takých, že platí: } F = \bigcup_{i=1}^m f_i(F). \quad (1)$$

Ak sú všetky koeficienty kontraktívnosti rovnaké, potom množinu F nazývame samopodobná a jej fraktálnu dimenziu vypočítame zo vzťahu:

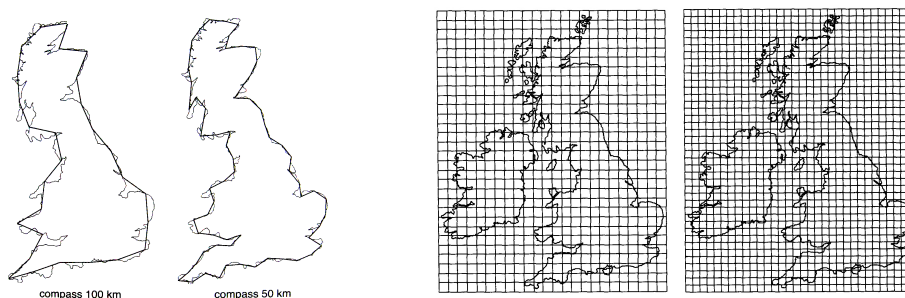
$$D = -\frac{\ln m}{\ln r} = \frac{\ln m}{\ln \frac{1}{r}}, \quad (2)$$

kde r je koeficient kontrakcie a m je počet kontraktívnych zobrazení.

Kochova krivka je presne samopodobná. Fraktálna dimenzia Kochovej krivky je pre $\alpha = 20^\circ$ $D \approx 1,0203$; pre $\alpha = 60^\circ$ je $D = 1,2618$; pre $\alpha = 80^\circ$ je $D \approx 1,6245$. Fraktálna dimenzia rovinnej krivky je číslo z intervalu $(1,2)$. Fraktál je množina, ktorej Hausdorffova dimenzia je ostro väčšia ako jej dimenzia topologická. Presné definície všetkých použitých pojmov fraktálnej geometrie sú uvedené v (Peitgen et al., 2004).

1.2 Metódy určenia fraktálnej dimezie krajinných prvkov

Na určenie hodnoty fraktálnej dimenzie nepravidelnej veľmi „kostrbatej“ krivky, pre ktorú nepoznáme „vzorec“ vyjadrujúci jej tvar, sa najčastejšie používajú metódy obvodová (*compass*) a mriežková (*box-counting*). Na obr. 3 je naznačené ich použitie pre pobrežie Veľkej Británie a Írska.



Obr. 3 Obvodová metóda (vľavo), mriežková metóda (vpravo) (Peitgen et al., 2004)

Poznámky:

1. Pri obidvoch metódach je potrebné si uvedomiť, že nepracujeme priamo v teréne, ale len zo zobrazením krajinného prvku na mape (v rovine).
2. Zaužívaný termín fraktálna dimenzia (respektíve jej neceločíselná hodnota) často zavádza k nesprávnemu záveru, že skúmaná krivka je fraktál. Mali by sme používať presnejší termín *compass* alebo *box-counting* dimenzia.

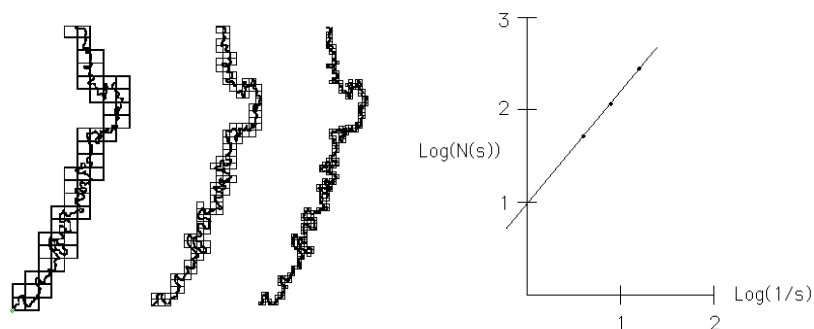
1.3 Metóda box-counting

Skúmaný útvar pokrývame vhodným pokrytím (v závislosti od jeho topologickej dimenzie). Tvar pokrývajúcich množín (*boxov*) môže byť napr. pre rovinnú krivku kruh alebo štvorec, pre plochu kocka. Následne sčítame počet *boxov* potrebných na pokrytie skúmaného útvaru. V druhom kroku postup zopakujeme, pričom zmenšíme veľkosť *boxov*. *Box-counting* dimenziu D skúmaného útvaru určíme zo vzťahu:

$$D = \frac{\log(N(s_{i+1})) - \log(N(s_i))}{\log \frac{1}{s_{i+1}} - \log \frac{1}{s_i}}, \quad (3)$$

kde s_i je veľkosť *boxu* (a $N(s_i)$ je počet neprázdnych *boxov*).

Pre ilustráciu uvedieme príklad použitia *box-counting* metódy pre časť rieky Mississippi (obr. 4 vľavo). Skúmanú krivku umiestnime do štvorcovej mriežky a spočítame počet štvorcíkov, v ktorých je aspoň kúsok krivky. Výsledky všetkých troch sčítaní sú v tab. 1, kde s_i je veľkosť strany štvorca, $N(s_i)$ je počet neprázdnych *boxov*, $i = 1, 2, 3$. Usporiadané dvojice čísel $[\log(1/s_i), \log(N(s_i))]$ znázorníme v tzv. *log-log* grafe (obr. 4 vpravo). Získame 3 body a nimi aproximujeme priamku, jej smernica je *box-counting* dimenzia. Zistili sme teda, že časť rieky Mississippi zobrazená na určitom stupni škálovania (v určitej mierke na mape), má fraktálnu dimenziu $D = 1,2$.



Obr. 4 Metóda box-counting (vľavo) (Frame et al., 2009)

Tab. 1 Výsledky *box-counting* metódy pre časť rieky Mississippi

s_i	$N(s_i)$	$\log(1/s_i)$	$\log(N(s_i))$
1/4	52	0,6	1,72
1/8	115	0,9	2,06
1/16	275	1,2	2,44

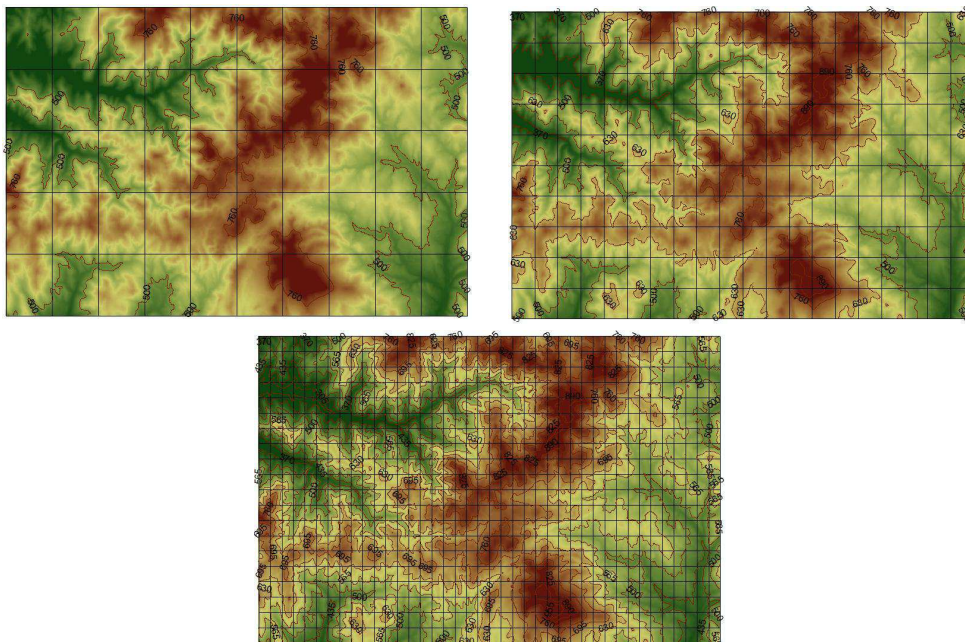
Pri použití *box-counting* metódy na určenie fraktálnej dimenzie prírodných štruktúr je veľmi dôležitá otázka mierky (škálovania). Pri presne samopodobných fraktálnych štruktúrach by sme získali na každom stupni škálovania ten istý výsledok. Body v *log-log* grafe by ležali ideálne na priamke. Pri štruktúrach, ktoré nie sú samopodobné (alebo dokonca nie sú ani fraktálne) môžeme používať metódy fraktálnej geometrie vždy len s vedomím istých obmedzení. Napr. ak určíme *box-counting* dimenziu rieky a používame jej zobrazenie na mape, výsledok závisí od podrobnosti mapy. Rieka ako celok skúmaná v mriežke veľkosti niekoľko kilometrov bude mať inú *box-counting* dimenziu, ako keď sa dostaneme v meraniach na úroveň centimetrov alebo dokonca jemných kapilár rozvetvujúcich sa v okolitej pôde. Zhrnúť všetky merania do jedného grafu by bolo možné, ale stratili by sme dôležité informácie, ktoré nám metóda *box-counting* ponúka.

2. Kvantitatívne vyjadrenie členitosti krajiny fraktálnou (*box-counting*) dimenziou

Slovensko je malá krajina, ale mimoriadne bohatá na rôzne krajinné typy podľa členitosti. Členitosť terénu je jednou z dominantných vlastností krajiny a má významný vplyv na celkový ráz krajiny a jej využitie. „Charakter reliéfu je rozhodujúci pri typizácii krajiny, vytvára základnú tvárnosť krajiny, na ktorú sa viažu ostatné prvky a javy. Obsah základných tvarov reliéfu, ako aj početnosť javov na nich sa viažucich, stúpa so zvyšujúcou sa celkovou členitosťou reliéfu. Stúpa diverzita informácie o krajine, zároveň sa diverzifikuje a dynamizuje vizuálne vnímanie.“ (Štefunková, 2005).

Zjednodušene sa dá povedať, že fraktálna dimenzia je mierou členitosti krivky alebo plochy. Ak skúmame členitosť krajinného reliéfu, potom jeho fraktálna (*box-counting*) dimenzia je číslo z intervalu $(2, 3)$. *Box-counting* dimenzia vyjadruje členitosť reliéfu krajiny, bez ohľadu na nadmorskú výšku, pričom zahŕňa horizontálnu aj vertikálnu členitosť a spád terénu.

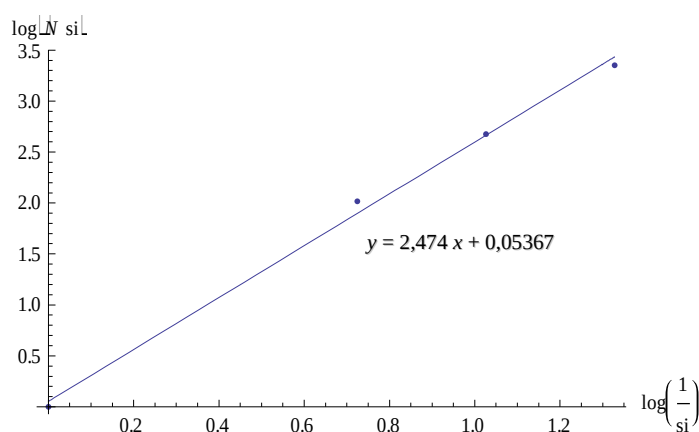
Na príklade výpočtu fraktálnej dimenzie reliéfu 8 oblastí na území Slovenska (Švantner, 2010) pomocou *box-counting* metódy v trojrozmernom priestore sme chceli ukázať vhodnosť zahrnutia fraktálnej dimenzie ako doplnkovej charakteristiky digitálneho modelu reliéfu vystihujúcu jeho členitosť. Veľkosť základného boxu bola zvolená pre každú skúmanú oblasť iná podľa jej veľkosti a výškového rozpätia. Základný box bol následne delený v prvom meraní v horizontálnom smere na 10×5 častí a vo vertikálnom na 3 vrstvy. V druhom a treťom meraní sa veľkosť boxov zmenšovala s koeficientom $\frac{1}{2}$. Celkový počet boxov bol v prvom delení 150, v druhom zjemnení počet častí narástol 2^3 násobne na 1200 a v najjemnejšom delení bol 9600. Tento prístup umožnil použiť primeraný odstup medzi susednými vrstevnicami, čo znamená určenie *box-counting* dimenzie v jemnejšom podrobnejšom zobrazení, a teda aj v inej škále. To sa ukázalo ako veľmi účelné najmä pri oblastiach s malým výškovým rozdielom. Na sčítovanie neprázdnych boxov, pre príslušné časti územia rozdelené podľa intervalov vrstevníc, bolo použité prostredie programu ArcGIS Desktop 9.3. Ukážku delenia boxov pre oblasť č. 6 ilustruje obr. 5. Výsledky všetkých troch sčítaní pri určovaní fraktálnej dimenzie tejto oblasti sú uvedené v tab. 2, kde s_i je veľkosť strany štvorca, $N(s_i)$ je počet neprázdnych boxov, $i = 1, 2, 3$. Usporiadané dvojice čísel $[\log(1/s_i), \log(N(s_i))]$ sú znázornené v tzv. *log-log* grafe na obr. 6 vytvorenom v prostredí systému Mathematica (Wolfram Mathematica 6.0, 2007).



Obr. 5 Vizualizácia postupného delenia oblasti č. 6

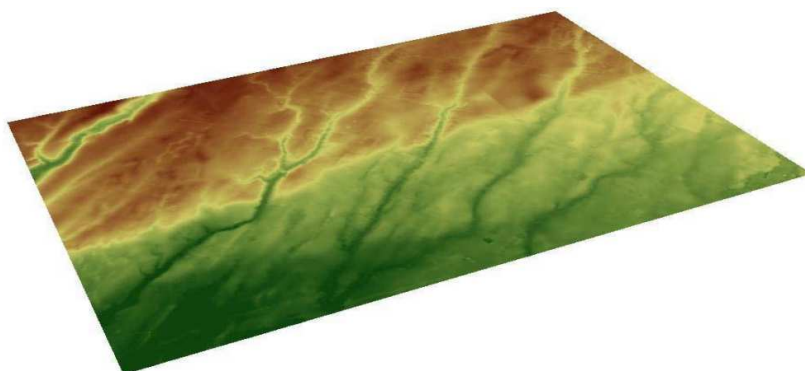
Tab. 2 Výsledky box-counting metódy pre oblasť č. 6

s_i	$N(s_i)$	$\log(1/s_i)$	$\log(N(s_i))$
1	1	0	0
0,188	102	0,725	2,009
0,094	482	1,026	2,683
0,047	2281	1,327	3,358



Obr. 6 Log-log graf pre oblasť č. 6

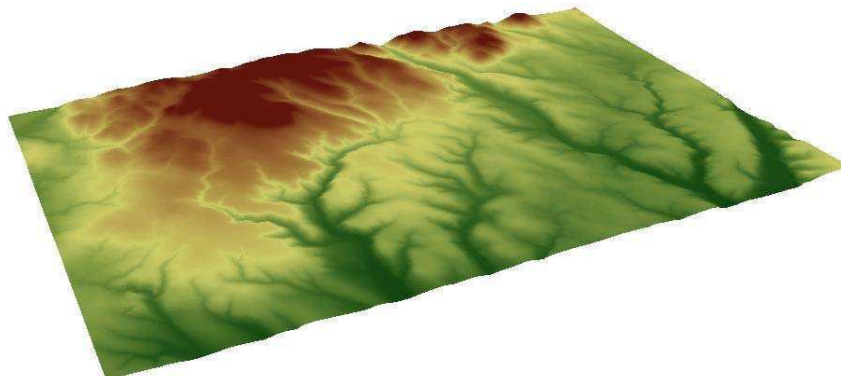
Nížinaté oblasti č. 1 a 2 sa nachádzajú v Podunajskej pahorkatine, ráz krajiny je ovplyvnený poľnohospodárskou činnosťou človeka, v týchto oblastiach sa najviac darí pestovaniu viniča. Obidve oblasti majú v horizontálnom smere rozmery 15 km krát 10 km. V prvej z nich leží mesto Levice, najväčšou riekou je Hron, výškový rozdiel je 98,9 m (od 137,9 m do 236,8 m). Terén v tejto oblasti je možné na veľkej časti charakterizovať ako pravidelný jednoduchý s malými výškovými rozdielmi. Hodnota fraktálnej dimenzie tejto oblasti je 2,356. V oblasti č. 2 leží mesto Želiezovce, vodstvo tvoria potoky, ktoré sú prítokmi Hrona, výškový rozdiel je 48 m (od 118,5 m do 166,5 m). Ako je vidieť na obr. 7, terén je možné charakterizovať ako nepravidelný so zárezmi vytvorenými vodnými tokmi. Hoci výškové rozdiely sú minimálne, fraktálna dimenzia tejto oblasti je 2,474.



Obr. 7 Digitálny model reliéfu oblasti č. 2 – kategórie nízina

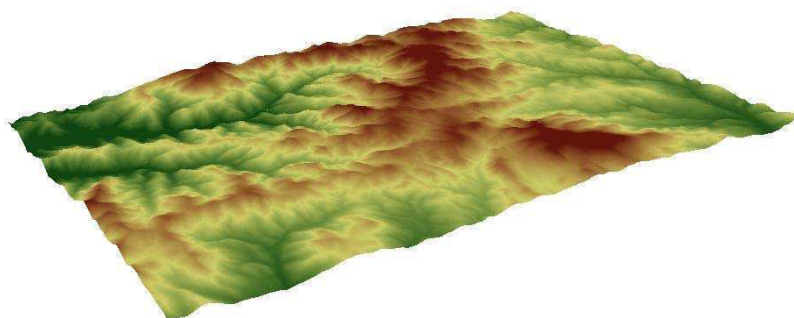
Oblasť č. 3 a 4 majú ráz vrchoviny a sú časťou geomorfologického celku Krupinská planina, v horizontálnom smere majú rozmer 15 km krát 10 km. V oblasti č. 3, ktorá je podhorím Štiavnických vrchov, leží mesto Krupina. Terén je nepravidelný s výškovým rozdielom 535,8 m (od 240,6 m

do 776,4 m). Priebek vrstevníc je členitý, ovplyvňuje ho značný počet potokov. Fraktálna dimenzia tejto oblasti je 2,476. Oblasť č. 4 sa nachádza na južných výbežkoch Štiavnických vrchov, najväčším centrom je obec Sebechleby, výškový rozdiel je 420,2 m (od 150,3 m do 570,5 m). V severnej časti sa nachádza vyvýšená oblasť, ktorej priebeh ovplyvňuje vertikálnu členitosť, na úbočiach sa striedajú vypuklé a vhlbené terénne plochy, v dôsledku čoho majú vrstevnice v tejto oblasti členitý charakter. Oblasť tiež obsahuje úžľabiny, ktoré vytvorili toky potokov. Celá oblasť vizuálne pripomína fraktálne útvary (napr. časť Mandelbrotovej množiny), jej digitálny model reliéfu je na obr. 8. Fraktálna dimenzia tejto oblasti je 2,504.



Obr. 8 Digitálny model reliéfu oblasti č. 4 – kategórie vrchovina

Pre analýzu územia kategórie vysočina boli vybrané oblasti č. 5 z okolia Novej Bane (Pohronský Inovec) a oblasť č. 6 z okolia Banskej Štiavnice. Ich rozmery v horizontálnom smere sú tiež 15 km krát 10 km. V severnej časti oblasti č. 5 preteká rieka Žitava, juhovýchodnou časťou Hron, výškový rozdiel je 707 m (od 186,8 m do 893,8 m). Túto oblasť môžeme zaradiť ako terén pravidelný členitý, jeho fraktálna dimenzia je 2,552. Oblasť č. 6, ktorá je časťou Štiavnických vrchov, má výškový rozdiel 761 m (od 246,7 m do 1007,7 m). Oblasťou preteká potok Richňava, významným tokom je Štiavnička. Oblasť je charakterizovaná ľudskou činnosťou, a to formou umelých vodných plôch tzv. tajchov, ktoré v minulosti boli budované a využívané v baníctve, v súčasnosti slúžia na rekreačné účely. Najznámejšie sú Počúvadlianske, Evičkino a Veľké Richňavské jazerá. Oblasť č. 6 môžeme charakterizovať ako terén nepravidelný, z hľadiska fraktálnej dimenzie je táto oblasť najzaujímavejšia, pretože priebeh reliéfu je najčlenitejší, čo možno vidieť na obr. 9. Vypuklé terénne plochy sa striedajú s vhlbenými terénnymi plochami, fraktálna dimenzia tejto oblasti je 2,545. Na obr. 11 uvádzame leteckú snímku oblasti č. 6 znázornenú spolu so zobrazením vrstevníc vygenerovaných programom ArcGIS Desktop 9.3 (ArcGIS DesktopHelp, 2010).

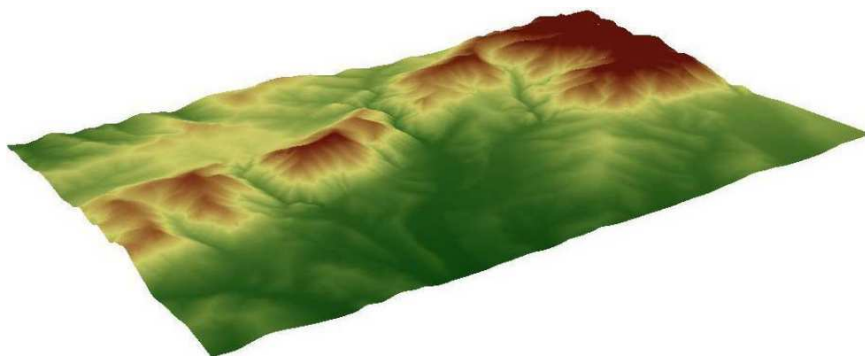


Obr. 9 Digitálny model reliéfu oblasti č. 6 – kategórie vysočina

Pohorie predstavujú oblasti č. 7 a 8, ktoré sú súčasťou Západných Tatier. Prvá z nich sa nachádza v okolí Žiarskej doliny, jej rozmer je 7,5 km krát 10 km. Celá oblasť spadá do Tatranského národného parku, jej výškový rozdiel je 1383,1 m (od 795,9 m do 2179,0 m). Fraktálna dimenzia

oblasti č. 7 je 2,526. Oblast' č. 8 je v okolí Prosieckej doliny. V horizontálnom smere má rozmer 15 km krát 10 km, výškový rozdiel je 1253,2 m (od 552,1 m do 1805,3 m). Členitosť reliéfu ilustruje obr. 10, jeho fraktálna dimenzia je 2,479.

Ukážky digitálnych modelov reliéfu oblastí z každej kategórie výškového členenia na obr. 7 až 10 sú vytvorené v prostredí Golden Software: Surfer (1999).



Obr. 10 Digitálny model reliéfu oblasti č. 8 – kategórie pohorie



Obr. 11 Snímka oblasti č.6 s pripojenými vrstevnicami generované programom ArcGIS Desktop 9.3

Záver

Analýza výsledkov z experimentálneho určenia fraktálnej (*box-counting*) dimenzie 8 vybraných oblastí na území Slovenska potvrdila, že *box-counting* dimenzia vyjadruje členitosť reliéfu krajiny, bez ohľadu na nadmorskú výšku, pričom zahŕňa horizontálnu aj vertikálnu členitosť a spád terénu. Preto navrhujeme spojením metód geodézie, kartografie a fraktálnej geometrie doplniť fraktálnu (*box-counting*) dimenziu ako ďalší údaj o členitosti reliéfu krajiny.

Príspevok vznikol za podpory grantovej výskumnej úlohy VEGA 1/0203/10.

Literatúra

- ArcGIS Desktop Help (2010). [cit. 2010-05-10]. Dostupné na: <<http://webhelp.esri.com/arcgisdesktop/9.2>>
- FAŠKOVÁ, Z., MÉSZÁROSOVÁ, K. (2008). Terrain typology and fractal dimension. In *Zborník 28. konferencie o geometrii a grafice*. Praha (Jednota českých matematiků a fyziků), s. 79-84.
- FRAME, M., MANDELBROT, B., NEGER, N. (2009). *Fractal geometry*. Yale University. [online]. [cit. 2009-09-09]. Dostupné na: <<http://classes.yale.edu/fractals/>>
- GOLDEN SOFTWARE: Surfer (1999). Surfer 7 User's Guide (Golden Software, Inc.).
- KOVÁČ, P. (2009). *Učebnica fraktálneho modelovania*. [online]. [cit. 2009-09-09]. Dostupné na: <<http://fractal.host.sk>>
- MANDELBROT, B. (2003). *Fraktály. Tvar, náhoda, dimenze*. Praha (Mladá fronta).
- MÉSZÁROSOVÁ, K. (2011). *Fraktály v krajinnej štruktúre*. Bratislava (Vydavateľstvo STU).
- PEITGEN, H., JÜRGENS, H., SAUPE, D. (2004). *Chaos and fractals*. New York (Springer-Verlag).
- ŠTEFUNKOVÁ, D. (2005). *Hodnotenie vizuálnej kvality krajiny. Krajinný obraz národná kultúrna hodnota*. Bratislava (Vydavateľstvo STU).
- ŠVANTNER, P. (2010). *Prvky členitosti v modelovaní krajiny*. Diplomová práca, Bratislava (Slovenská technická univerzita).
- WOLFRAM Mathematica 6.0, Copyright 1988-2007 (Wolfram Research).

S u m m a r y

Quantitative expression of terrain roughness by fractal dimension

Digital elevation model is used in many analysis and visual inspections. It is necessary to know features of digital elevation model, elements of complexity, forms and typology of terrain and relief. Contribution discusses the quantitative description of terrain roughness by using methods of the fractal geometry. The vertical and horizontal components of the area are considered in its fractal dimension. To gain the fractal dimension, the box-counting method in tree-dimensional space has been applied for eight experimental territories. Taking the fractal dimension into account can be useful in the basic terrain typology. The experimental territories are displayed with digital elevation models (created in Golden Software Surfer), locality No 6 with picture together with contour lines. Samples of digital elevation models show coherence between forms of relief and fractal structures, especially for localities No 4 and 6. We present our results in values of fractal dimension of locality No 6 by graph and table form. In conclusion we observe, that fractal dimension value is possible and actually necessary to include between characteristics of DEM.

Fig. 1 Generator of Koch's curve (on the left), four iterations of Koch's curve for $\alpha = 60^\circ$ (on the right)

Fig. 2 Koch's curve (i-th iteration for angle $\alpha = 20^\circ$; $\alpha = 60^\circ$; $\alpha = 80^\circ$) (Kováč, 2009)

Fig. 3 Compass method (on the left), box-counting method, from: (Peitgen et al., 2004)

Fig. 4 Box-counting method (on the left), log-log graph (on the right) (Frame et al., 2009)

Fig. 5 Visualisation of consecutive dividing of locality Nr. 6

Fig. 6 Log-log graph for locality Nr. 6

Fig. 7 Digital elevation model of locality Nr. 2

Fig. 8 Digital elevation model of locality Nr. 4

Fig. 9 Digital elevation model of locality Nr. 6

Fig. 10 Digital elevation model of locality Nr. 8

Fig. 11 Picture of locality Nr. 6 with contours generated by program ArcGIS Desktop 9.3

Tab. 1 Results of box-counting method for part of Mississippi river

Tab. 2 Results of box-counting method for analysed localities

Recenzoval:

Doc. RNDr. Andrej FERKO, CSc.,

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,

Bratislava