

Miloš Val'ko

## VZÁJEMNÉ POROVNÁNÍ ALGORITMŮ PRO TRANSFORMACI SOUŘADNIC MEZI SOUŘADNICOVÝMI SYSTÉMY

Val'ko, M.: Mutual comparison of algorithms for coordinate transformation between coordinate systems. Kartografické listy 2011, 19, 3 figs., 5 refs.

**Abstract:** In present mutual spatial transformations between two closed coordinate systems are widely used in geodesy and cartography. Transformation between Cartesian and curvilinear coordinates, two spatial coordinate system and between two ellipsoidal systems are discussed here.

**Keywords:** spatial transformation, minimum distance mapping, procrustal procedure

### Úvod

V současné době můžeme v odborné literatuře nalézt mnoho algoritmů pro transformaci kartézských souřadnic. Některé z nich se běžně používají v mnoha aplikacích, některé kvůli své výpočetní náročnosti nenašli své uplatnění. O nutnosti časté transformace souřadnic mezi souřadnicovými systémy snad není ani nutno hovořit. Použití rozličných souřadnicových systémů na jednom území v historickém průběhu nebo ve světě je toho jasným důkazem. Článek má za cíl přiblížit způsoby transformace souřadnic mezi dvěma blízkými souřadnicovými systémy. Na základě splnění tohoto požadavku, lze rozdíly mezi systémy poměrně linearizovat.

### 1. Transformace kartézských souřadnic na elipsoidické

Při transformaci geocentrických pravoúhlých kartézských souřadnic  $X, Y, Z$  získaných např. některou z moderních prostorových technik (nejčastěji GNSS přijímačem) na pravoúhlé křivočaré souřadnice  $\varphi, \lambda, h$  vztahující se k zvolenému referenčnímu elipsoidu narazíme na problém s jejich analytickým vyjádřením zejména elipsoidické šířky  $\varphi$ , jak je to patrné ze vztahů (1) (Pick, 1998):

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= \left( \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= \left( \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \sin \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

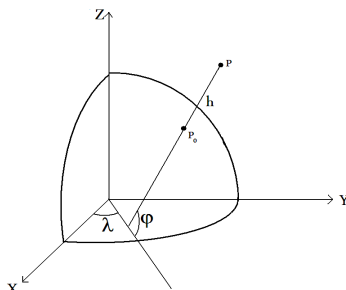
odkud lze přímo vyjádřit jenom elipsoidickou délku  $\lambda$  pomocí podílu souřadnic  $Y$  a  $X$  pro daný bod.

Tento problém s korektním vyjádřením elipsoidické šířky  $\varphi$  se řeší nejčastěji pomocí iterací, protože při pokusu o analytické vyjádření elipsoidické šířky  $\varphi$  obecně dospějeme k algebraické rovnici vyššího stupně, která má obecně hned několik reálných kořenů, co vede k nejednoznačnosti určení příslušné souřadnice. V literatuře se můžeme setkat s algoritmy, které jsou speciálně upravovány pro

---

Ing. Miloš VALKO, Ph.D., Západočeská Univerzita v Plzni, Univerzitní 22, 314 00 Plzeň, e-mail: mvalko@kma.zcu.cz

zvýšení rychlosti konvergence, např. Bowling (1976), která pro určení elipsoidické šířky  $\varphi$  používá jenom jednu iteraci, přesnost takového způsobu je však závislá na vzdálenosti transformovaného bodu k ploše dvojsového rotačního elipsoidu, tj. od elipsoidické výšky (obr. 1).



Obr. 1 Vztah mezi pravouhlými a elipsoidickými souřadnicemi

### 1.1 Kritérium minimální vzdálenosti

V následujícím odstavci lze nalézt jiný způsob řešení problému, který vychází z odlišného pohledu na problém. Tento přístup se v odborné literatuře označuje pojmem „Minimum distance mapping“ a je založený na hledání souřadnic odpovídajícího bodu nacházejícího se na povrchu dvojsového rotačního elipsoidu, který se nachází v nejbližší vzdálenosti od transformovaného bodu  $P$ . Řešení je pak minimum variační funkce  $L(x,y,z,k)$  (Awange et al., 2005):

$$L(x, y, z, k) = \frac{1}{2} \left[ (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 \right] + \frac{1}{2} k (b^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 z^2 - a^2 b^2), \quad (2)$$

kde  $X, Y, Z$  jsou dané souřadnice bodu a  $x, y, z$  jsou určovány souřadnice příslušného bodu na ploše elipsoidu. Symbol  $k$  zde značí konstantu pro Lagrangeův multiplikátor. Řešení musí splňovat podmínku nulových hodnot parciálních derivací ve směrech všech souřadnic a Lagrangeovho multiplikátora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y, z, k)}{\partial x} &= -(X - x) + kb^2 x = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, z, k)}{\partial y} &= -(Y - y) + kb^2 y = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, z, k)}{\partial z} &= -(Z - z) + ka^2 z = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, z, k)}{\partial k} &= \frac{1}{2} (b^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 z^2 - a^2 b^2) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

O tom, že nalezené řešení je skutečně minimem funkce  $L(x,y,z,k)$  se můžeme přesvědčit výpočtem druhých parciálních derivací, které pro hodnotu minima musí dosahovat nutně kladné hodnoty.

### 1.2 Rozšířená verze Newton-Ralphsonovy metody

Dalším ze způsobů, jak se dívat na problém určení polohy bodu na ploše elipsoidu je prostřednictvím Newton-Ralphsonovy metody. Nejdříve si zde zavedeme nové proměnné  $\alpha, \beta, \gamma$  následovně (Awange et al., 2005):

$$\alpha = X - x, \quad \beta = Y - y, \quad \gamma = Z - z,$$

co jsou v podstatě složky vektoru  $P_0P$  v směru souřadnicových os  $X, Y, Z$ . Pro bod na elipsoidu pak platí vztah:

$$\frac{(X - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(Y - \beta)^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (4)$$

nebo

$$X^2b^2 + Y^2b^2 + Z^2a^2 + b^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + a^2\gamma^2 - 2X\alpha b^2 - 2Y\beta b^2 - 2Z\gamma a^2 - a^2b^2 = 0. \quad (5)$$

Jestli si ve vztahu (5) zavedeme normalizační parametr  $n = X^2b^2 + Y^2b^2 + Z^2a^2 - a^2b^2$ , kterým vydělíme celý vztah, pak lze vztah (5) za předpokladu nenulové hodnoty parametru  $n$  upravit do tvaru vhodnějšího pro numerické výpočty:

$$1 + \frac{b^2}{n}\alpha^2 + \frac{b^2}{n}\beta^2 + \frac{a^2}{n}\gamma^2 - 2\frac{Xb^2}{n}\alpha - 2\frac{Yb^2}{n}\beta - 2\frac{Za^2}{n}\gamma = 0. \quad (6)$$

Jestliže  $n=0$   $m^4$ , což nastane v případě, že bod se souřadnicemi  $X, Y, Z$  leží na povrchu elipsoidu, pak je řešením  $\alpha = \beta = \gamma = 0$   $m$ .

Dostali jsme tedy jednu rovnici pro tři neznámé parametry  $\alpha, \beta, \gamma$ . Pro získání jediného řešení této poturčené úlohy je nutno zavést dodatečné podmínky, co je zde podmínka minima čtverce vzdálenosti  $d = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  bodu od elipsoidu.

Snad největší výhodou tohoto algoritmu je skutečnost, že při transformaci blízkých bodů budou parametry  $\alpha, \beta, \gamma$  mít téměř stejné hodnoty, co se dá použít jako počáteční hodnota neznámých parametrů pro transformaci vzájemně blízkých bodů.

### 1.3 Výpočet elipsoidických souřadnic

Po výpočtě polohy bodu na ploše elipsoidu, tj. po určení hodnot  $x, y, z$  nebo hodnot  $\alpha, \beta, \gamma$ , elipsoidické souřadnice  $\varphi, \lambda, h$  získáme pomocí vztahů:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{Z - z}{\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}} \\ \tan \lambda &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{Y - y}{X - x} \\ h &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Zde se s výhodou používá skutečnost, že vektor určen koncovými body  $P_0$  a  $P$  je zároveň vektorem vnější normály k ploše elipsoidu. Tedy velikost vektoru přímo určuje délku vnější normály k ploše od bodu na elipsoidu po daný bod, což je v podstatě klasická definice elipsoidické výšky. Ze směřování vektoru lze zjistit hodnoty ostatních elipsoidických souřadnic  $\varphi, \lambda$ .

## 2. Prostorová transformace mezi dvěma systémy

Když se používají souřadnice z různých zdrojů, je dost častým problémem, že mohou být vztáhnuty k různým souřadnicovým systémům, a tedy k různým elipsoidům, nebo k rozdílným časovým epochám stejného geodetického systému. Tedy pro další použití těchto dat je nezbytná transformace všech souřadnic do stejného systému. V odborní literatuře se dává přednost konformním transformacím, u nichž nedochází ke změně tvaru transformovaného objektu, tj. může při transformaci dojít k posunu objektu, může se změnit orientace objektu vůči souřadnicovým osám, ale nesmí dojít ke změně vnitřních úhlů objektu.

### 2.1 Burša-Wolfův model pro transformaci prostorových souřadnic

U tohoto modelu, kterému se taktéž říká sedmiprvková transformace, jsou informace mezi dvěma pravouhlymi kartézskými systémy dány pomocí sedmi parametrů: vektorem změny počátku souřadnicových systémů (3 parametry), parametr relativní změny měřítka mezi systémy (1 parametr) a rotační parametry, které určují vztahy mezi směry souřadnicových os obou souřadnicových systémů (3 parametry) (obr. 2).

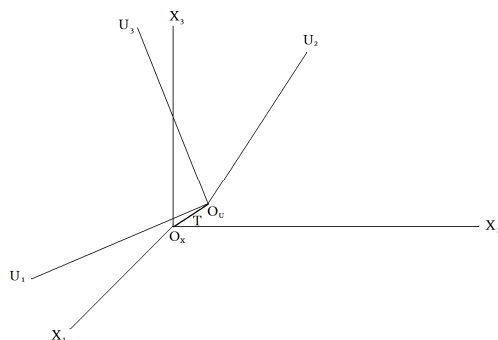
Vektorově lze problém zapsat v tvaru (Hefty a Husár, 2003):

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + (1 + \delta)\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{X}$  představuje transformovaný vektor,  $\mathbf{T} = (\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z)^T$  je vektor změny počátku souřadnicových os (vektor translace),  $\delta$  je bezrozměrná hodnota relativní změny měřítka mezi oba systémy,  $\mathbf{R}$  představuje rotační matici popisující změnu orientací os souřadnicového systému a  $\mathbf{U}$  představuje vektor původních souřadnic.

Rotační matice  $\mathbf{R}$  je matice, která vznikne skalárním součinem tří rotačních matic, z kterých každá je rotační maticí zabezpečující rotaci souřadnicového systému kolem jedné ze souřadnicových os, tj.  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\varepsilon, \psi, \omega) = \mathbf{R}_3(\omega) \cdot \mathbf{R}_2(\psi) \cdot \mathbf{R}_1(\varepsilon)$ . Z vlastností částečných rotačních matic  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  a  $\mathbf{R}_3$  (tj. rotačních matic jenom kolem jedné ze souřadnicových os) je známo, že jsou matice ortogonální, a proto i celková rotační matice  $\mathbf{R}$  musí být maticí ortogonální, tj. musí pro ní platit:  $\det(\mathbf{R}) = 1$ .

Relativní změna měřítka  $\delta$  je veličinou, ze které lze zjistit, jak se mění délkové poměry po transformaci. Při kladné hodnotě tohoto parametru dochází k nárůstu délky, a naopak u záporné hodnoty tohoto parametru se hodnota délky naopak zmenší. Nulová hodnota parametru nám zabezpečí, že transformací se obrazec vůbec nedeformuje, co nachází své využití v mnoha aplikacích.



Obr. 2 Vztah mezi prostorovými systémy

## 2.2 Molodenského-Badekasova úprava modelu

Použití Burša-Wolfova modelu má nesporně své výhody: model je značně jednoduchý a jednotlivé parametry mají svou geometrickou interpretaci. Ke značným komplikacím může docházet při snaze o určení hodnot transformačních parametrů (transformačního klíče transformace). Při tvorbě tzv. lokálního transformačního klíče, tj. klíče, u kterého jsou identické body na rozlohou útvaru malé ploše, dochází k numericky velice špatně podmíněné matici soustavy normálních rovnic, co má přímý důsledek na numerickou stabilitu problému určení neznámých parametrů a extrémní citlivost řešení na variaci vstupních parametrů. Proto se často vztah (8) ještě před samotným použitím mírně modifikuje. Zvolí se vhodně vybraný vztahový bod  $\mathbf{U}_0$ , ke kterému se pak vztáhnou všechny hodnoty souřadnic, čím se (8) změní na tvar (Hefty a Husár, 2003):

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}' + \mathbf{U}_0 + (1 + \delta)\mathbf{R} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0). \quad (9)$$

Z numerického hlediska je výhodné volit vztahový bod v těžišti identických bodů, co zvýší počet nulových prvků v soustavě normálních rovnic a ulehčí tak výpočet inverzní matice. Je nutno ještě podotknout skutečnost, že vztahy (8) a (9) nejsou úplně kompatibilní, tj. použitím prvního nebo druhého vztahu dostaneme lišící se hodnoty neznámých transformačních parametrů v závislosti na jejich velikosti. Tato změna nemá vliv na hodnotu měřítkového faktoru a rotační úhly.

Pro přímý odhad neznámých parametrů pomocí MNC se vztah (9) ještě mírně upraví na vhodnější tvar:

$$\mathbf{X} - \mathbf{U} = \mathbf{T}' + \mathbf{R}' \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0), \quad (10)$$

kde matice  $\mathbf{R}'$  má tvar:

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} \delta & \omega & -\psi \\ -\omega & \delta & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & \delta \end{pmatrix},$$

kde se předpokládají velmi malé hodnoty rotačních úhlů a malá hodnota relativního měřítka, čímž lze z rozvoje pro trigonometrické funkce rotačních úhlů vzít jenom první člen rozvoje a zanedbat členy vyšších řádů, čímž se výrazně zjednoduší matice. Je nutno ještě podotknout, že tyto úpravy mají zásadní vliv na vlastnost ortogonalitu zjednodušené matice, neboť matice už nemá jednotkový determinant.

### 2.3 Postup založený na minimalizaci rotačních úhlů

Tento postup, v literatuře označovaný jako „Procrustes algorithm“ je založený na následující myšlence: mějme dva blízké systémy  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  a hledáme takovou rotační matici  $\mathbf{T}$ , která v maximální možné míře tyto dva systémy ztotožní. Míra ztotožnění je vyjádřena hodnotou normy (Awange et al., 2005):

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{T}\| = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{A}' - \mathbf{T}'\mathbf{B}')(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{T})]}, \quad (11)$$

kteřá má být minimální. Úpravou dostaneme:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{T}\|^2 = \text{tr}[(\mathbf{A}' - \mathbf{T}'\mathbf{B}')(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{T})] = \text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A} - 2\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{T} + \mathbf{B}'\mathbf{B}). \quad (12)$$

Ze vztahu (12) lze vyvodit závěr, že úloha minimalizace výrazu  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{T}\|^2$  je totožná s úlohou maximalizace výrazu  $\text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{T})$ , protože stopy matic  $\text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A})$  a  $\text{tr}(\mathbf{B}'\mathbf{B})$  nejsou závislé na hodnotě rotační matice  $\mathbf{T}$ .

Dále se budeme zabývat aplikací této myšlenky na sedmiprvkovou transformaci definované v podkapitole 2.1. Pro transformaci platí (Awange et al., 2005):

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2\mathbf{X}_3x_1 + \mathbf{I}\mathbf{x}'_2 + \mathbf{E}, \quad (13)$$

kde matice vstupních (originálních) souřadnic  $\mathbf{Y}_1$  a matice nových souřadnic  $\mathbf{Y}_2$  mají tvar:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_n \end{bmatrix},$$

veličina  $x_1 \in \mathfrak{R}$  představuje měřítkový parametr, sloupcový vektor  $\mathbf{x}_2 \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$  je vektor translace a matice  $\mathbf{X}_3 \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  je rotační matice, matice  $\mathbf{I} \in \mathfrak{R}^{n \times 3}$  je jednotkovou maticí a matice  $\mathbf{E} \in \mathfrak{R}^{n \times 3}$  je matice náhodných chyb.

Cílem je minimalizovat seminormu Frobeniovy chybové matice:

$$\|\mathbf{E}\|_W^2 = \text{tr}(\mathbf{E}'\mathbf{W}\mathbf{E}). \quad (14)$$

Můžeme tedy napsat:

$$\begin{aligned} L(x_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{X}_3) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\|_W^2 = \|\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{X}_3x_1 - \mathbf{I}\mathbf{x}'_2\|_W^2 = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{X}_3x_1 - \mathbf{I}\mathbf{x}'_2)' \mathbf{W}(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{X}_3x_1 - \mathbf{I}\mathbf{x}'_2)] = \min. \end{aligned} \quad (15)$$

Pro derivaci variační funkce podle vektoru translace platí:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}'_2} = (\mathbf{I}'\mathbf{W}\mathbf{I})\mathbf{x}_2 - (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\mathbf{X}_3x_1)' \mathbf{W}\mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Odkud lze vyjádřit translační vektor na základě znalosti měřítkového parametru. Vztah (15) pak můžeme upravit na tvar:

$$L(x_1, \mathbf{X}_3) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \left[ \mathbf{Y}_1 - \left( \mathbf{Y}_2 \mathbf{X}'_3 x_1 + (\mathbf{I}' \mathbf{W} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{I}' \mathbf{W} (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{X}'_3 x_1) \right) \right] \cdot \mathbf{W} \cdot \left[ \mathbf{Y}_1 - \left( \mathbf{Y}_2 \mathbf{X}'_3 x_1 + (\mathbf{I}' \mathbf{W} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{I}' \mathbf{W} (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{X}'_3 x_1) \right) \right] \right\}, \quad (17)$$

co lze po zavedení matice  $\mathbf{C} = \mathbf{I} - (\mathbf{I}' \mathbf{W} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{I}' \mathbf{W}$  zapsat ve tvaru:

$$L(x_1, \mathbf{X}_3) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \left[ \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{X}'_3 x_1 \right] \cdot \mathbf{C}' \mathbf{W} \mathbf{C} \cdot \left[ \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{X}'_3 x_1 \right] \right\}, \quad (18)$$

odkud lze měřítkový faktor vyjádřit ve tvaru:

$$x_1 = \frac{\operatorname{tr} [\mathbf{Y}'_1 \mathbf{C}' \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{Y}_2 \mathbf{X}'_3]}{\operatorname{tr} [\mathbf{Y}'_2 \mathbf{C}' \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{Y}_2]}. \quad (19)$$

Dosazením (19) do (16) lze vyjádřit vektor translace  $\mathbf{x}_2$ . Rotační matici  $\mathbf{X}_3$  lze získat pomocí algoritmu dekompozice singulárních vlastních čísel.

Kvalitu transformace popisuje:

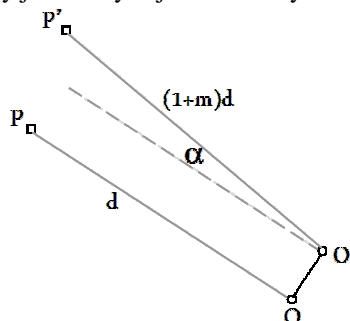
$$\|\mathbf{E}_l\|_W = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{E}'_l \mathbf{W} \mathbf{E}_l) / 3n},$$

kde  $n$  je počet bodů pro transformaci a  $\mathbf{E}_l$  je empirická chybová matice daná vztahem:

$$\mathbf{E}_l = \left[ \mathbf{I} - \mathbf{I}' \mathbf{W} (\mathbf{I}' \mathbf{W} \mathbf{I})^{-1} \right] \left\{ \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{V} \mathbf{U}' x_1 \right\}$$

### 3. Transformace elipsoidických souřadnic

Jestli je potřeba vykonat transformaci jenom elipsoidických souřadnic, bez použití informace o elipsoidické výšce nebo elipsoidické výšky nejsou k dispozici, pak je k dispozici matematický aparát transformace souřadnic, který je vhodný zejména v malých lokalitách (obr. 3).



Obr. 3 Transformace elipsoidických souřadnic

Nechť  $\mathbf{x}' = (\varphi' \lambda')$  je vektor transformovaných souřadnic,  $\mathbf{x} = (\varphi \lambda)$  je vektor originálních souřadnic. Mezi těmito systémy lze napsat matematický vztah:

$$\mathbf{x}' = \Delta \mathbf{x} + (1+m) \mathbf{R} \mathbf{x}, \quad (20)$$

kde vektor  $\Delta \mathbf{x}$  představuje vektor posunu počátku souřadnicového systému, skalární parametr  $m$  představuje měřítkový faktor a matice  $\mathbf{R}$  je ortogonální rotační matice.

Jestli se jedná o dva vzájemně blízké systémy, lze vykonat aproximaci ve formě ortogonální projekce bodů z povrchu dvojosého rotačního elipsoidu do tangenciální roviny k elipsoidu ve vhodně zvoleném bodě. Zde se doporučuje použít těžiště obrazce originálních souřadnic. Problém pak přejde do tvaru:

$$\begin{pmatrix} M' \varphi' \\ N' \cos \varphi' \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \Delta \varphi \\ N \cos \varphi_T \Delta \lambda \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \varphi_r \\ N \cos \varphi_T \lambda_r \end{pmatrix}, \quad (21)$$

kde  $M, M', N, N'$  jsou meridiánové a příčné poloměry křivosti, definované např. v Cimbálík a Mervart (1997), počítané pro těžiště útvaru  $\varphi_T$ , dále  $\varphi_r, \varphi'_r, \lambda_r, \lambda'_r$  jsou redukovány hodnoty elipsoidických souřadnic v obou systémech,  $m$  je měřítkový faktor a  $\alpha$  je úhel pootočení systému definovaný kladně v kladném smyslu.

Za předpokladu blízkosti souřadnicových systémů lze položit  $M = M', N = N'$  a  $\varphi = \varphi'$ , čím se problém zjednoduší na tvar:

$$\begin{pmatrix} n' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta n \\ \Delta e \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ e \end{pmatrix} \quad (22)$$

Vztah (22) lze za předpokladu malé hodnoty měřítkového faktoru  $m$  a malé hodnoty rotačního úhlu  $\alpha$  po rozvinutí trigonometrických funkcí neznámých veličin do Taylorova radu, ze kterého se použije jenom první člen, a zanedbají se členy vyšších řádů upravit na tvar:

$$\begin{pmatrix} n' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta n \\ \Delta e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & \alpha \\ \alpha & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ e \end{pmatrix} \quad (23)$$

Po transformaci se hodnoty  $n', e'$  vrátí zpátky na elipsoidické souřadnice pomocí zpětného převodu:

$$\varphi' = \varphi'_T + \frac{n'}{M'}, \quad \lambda' = \lambda'_T + \frac{e'}{N' \cos \varphi'_T} \quad (24)$$

### Závěr

Výběr vhodného algoritmu pro transformaci z pravoúhlých souřadnic na křivočaré elipsoidické souřadnice, který je rychlý a v rámci požadované kvality přesný, výběr vhodného způsobu prostorové transformace souřadnic jako i vzájemné transformace elipsoidických souřadnic jsou problémy, se kterými se setkáváme při své práci téměř každý den. Cílem článku bylo porovnání filozofie transformací a vzájemné porovnání jednotlivých přístupů. Nelze jednoznačně stanovit nejvhodnější transformaci v každé kategorii, toto rozhodnutí musí udělat každý uživatel na základě svých požadavků na přesnost a rychlost transformace.

### Literatura

- AWANGE, J. L., GRAFAREND, E. W., PALÁNCZ, B., ZALETNYIK, P. (2005). *Algebraic geodesy and geoinformatic*. Berlin (Springer Verlag).
- BOWRING, B. R. (1976). Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey review XXIII*, 23, 181, s. 323-327.
- CIMBÁLÍK, M., MERVART, L. (1997). *Vyšší geodézie 1*. Praha (Vydavatelství ČVUT).
- HEFTY, J., HUSÁR, L. (2003). *Družicová geodézie. Globální polohový systém*. Bratislava (Vydavatelstvo STU).
- PICK, M. (1998). *Geodézie. Souřadnicové systémy a zobrazení*. Bratislava (Vydavatelstvo STU).

### S u m m a r y

#### Mutual comparison of algorithms for coordinate transformation between coordinate systems

Choice of the best optimal way to transform coordinates from Cartesian to ellipsoidal coordinates, spatial coordinates between two close coordinate systems or transformation of coordinates between two close coordinate systems on ellipsoid is compromise between achieved accuracy of transformation and speed of transformation process. This decision must do every user base on his needs.

Fig. 1 Relation between spatial and curvilinear coordinates

Fig. 2 Relation between spatial coordinate systems

Fig. 3 Transformation of ellipsoidal coordinates

#### Recenzoval:

**prof. Ing. Bohuslav VEVERKA, DrSc.,**  
**České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavení,**  
**Praha, Česká republika**