Radko MESIAR

MOŽNOSTI APLIKÁCIE TEÓRIE FUZZY MNOŽÍN V KARTOGRAFII

Mesiar, Radko: On some possible applications of fuzzy set theory in cartography. Kartografické listy, Vol. 2, 1994, 5 refs..

Abstract: Subjective evaluation processes modeling is well fitted with the fuzzy set and fuzzy measure theory. After some basic notions, a qualitative evaluation model of cartographical works is presented. For measurements evaluation, the fuzzy numbers are suggested.

Key words: fuzzy set, fuzzy measure, fuzzy integral, fuzzy number, measurement, qualitative evaluation.

Úvod

Modelovanie subjektívnych rozhodovacích procesov, založených zvyčajne na neúplných, resp. nepresných informáciách, v rámci štandardnej matematiky vedie zvyčajne k rôznym pravdepodobnostným modelom. V mnohých prípadoch tieto modely zlyhávajú, resp. sa ani nedajú zostrojiť. Dôvodom je najmä požiadavka veľkého množstva informácií (ak majú byť tieto modely dostatočne presné), ktoré reálne nemusia byť získateľné. Ďalej, pravdepodobnosť je len jeden možný model neurčitosti (i keď treba priznať, že najpoužívanejší a najprepracovanejší). Tak napr. neurčitosť, ktorá sa nespráva aditívne, nemôže byť dobre popísaná pravdepodobnostnými (teda aditívnymi) modelmi. Z iných typov mier neurčitosti pripomeňme napr. možnosť (possibility), dôveru (belief), vhodnosť (plausibility).

Prudký rozvoj všetkých oblastí ľudského poznávania, podmienený najmä rozvojom výpočtovej techniky, vyvolal veľký tlak na vznik viacerých neštandardných matematických modelov. Jednou z najsľubnejších alternatív sa ukazuje modelovanie subjektívnych rozhodovacích procesov pomocou teórie *fuzzy množín*. Výrazný podnet pre rozvoj teórie *fuzzy množín* priniesol ekonomický úspech technológií založených na "fuzzy" najmä v Japonsku (fuzzy kamera, práčka, vysavač, výťah, vrtuľník, vlak atď.). Nezanedbateľný je aj spätný vplyv "fuzzy" na výpočtovú techniku ako v software (kontrola, expertné systémy), tak v hardware (fuzzy čipy). Hlavné oblasti aplikácií sú v ekonomike, medicíne, kontrole. Zhruba možno povedať, že každá oblasť, v ktorej pracujú experti na základe subjektívnych skúseností, je potenciálnou oblasťou aplikácií teórie fuzzy množín. Toto je aj prípad kartografie.

Doc. RNDr. **Radko Mesiar**, CSc., Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty Slovenskej **technickej univerzity**, Radlinského 11, 813 68 Bratislava

V nasledujúcej časti stručne popíšeme základné pojmy z oblasti fuzzy množín a fuzzy mier. V tretej časti sa budeme venovať konkrétnej aplikácii na hodnotenie kvality kartografických diel. V poslednej časti navrhneme príklad možnej aplikácie fuzzy čísel v oblasti kartografie.

Čo je to "fuzzy" ?

Presný preklad slovka *fuzzy* do slovenčiny zatiaľ neexistuje. Každý z občas používaných výrazov *hmlistý, neurčitý, rozmazaný* je vlastne "fuzzy" prekladom, takže v poslednej dobe sa aj u nás ujal originálny názov zavedený v r. 1965 Lotfi A. Zadehom [5]. Väčšinou sa prívlastok "fuzzy" spája s pojmom *fuzzy množiny*. Avšak pozor! Popri teórii a aplikáciách fuzzy množín a s nimi spätou fuzzy logikou existuje bohatá teória *fuzzy mier* s početnými aplikáciami. Takže "fuzzy" treba chápať ako prívlastok naznačujúci istý typ neurčitosti.

Základná Zadehova myšlienka vychádza zo zovšeobecnenia Cantorovských množín, u ktorých každý prvok $\mathbf{x}$ základného priestoru $\mathbf{X}$ buď patrí do podmnožiny A (a teda jeho príslušnost $A(\mathbf{x})$ do A sa rovná jednej, $A(\mathbf{x}) = 1$), alebo $\mathbf{x}$ nepatrí do A (a teda $A(\mathbf{x}) = 0$). Klasická teória množín je spätá s dvojhodnotovou logikou (áno-nie; 0-1). Zadeh rozšíril možnosť hodnôt príslušnosti $A(\mathbf{x})$ z množiny $\{0,1\}$ na celý interval $[0,1]$. Ako chápať napr. $A(\mathbf{x}) = 0.7$? Môže ísť o subjektívne hodnotenie experta, resp. hodnotenie skupiny ľudí. Klasický je príklad s výrazmi popisujúcimi vek. Nech A značí povedzme mládež a nech $\mathbf{x}$ je osoba dajme tomu 24-ročná. Zaradenie tejto osoby medzi mládež nie je jasné. Z hľadiska stredoškolákov tam už nepatrí. Zato väčšina vysokoškolákov by ju tam zaradila (a zrejme asi všetci dôchodcovia). Takto $A(\mathbf{x}) = 0.7$ zodpovedá stupňu príslušnosti $\mathbf{x}$ do A (t.j. 70% ludí zaradí $\mathbf{x}$ do A). A = "mládež" samozrejme nie je množina v klasickom zmysle, ale môžeme ju stotožniť s funkciou príslušnosti do A definovanou na základnom priestore popisujúcom vek (napr. interval $[0,100]$).

Nech napr. $A(\mathbf{x}) = \min(1,\max(0,(45\text{-}\mathbf{x})/30))$. Takto A je fuzzy podmnožinou základného priestoru $[0,100]$. Vo všeobecnosti, ľubovoľnú funkciu A zobrazujúcu základný priestor $\mathbf{X}$ do intervalu $[0,1]$, $A:\mathbf{X} \to [0,1]$, vazývame fuzzy podmnožinou priestoru $\mathbf{X}$, resp. fuzzy množinou. Poznamenajme, že fuzzy množiny sú späté s viachodnotovou (fuzzy) logikou, pripúšťajúcu pravdivostné hodnoty z celého intervalu $[0,1]$.

Množinové operácie doplnku, prieniku a zjednotenia (ich logické ekvivalenty su negácia, konjunkcia a disjunkcia) sa podobne ako u klasických Cantorovských množín definujú bodovo pomocou operácií na intervale $[0,1]$, ktoré pre hodnoty z $\{0,1\}$ dávajú tie isté výsledky, ako ich klasické vzory. Zvyčajne používame tieto operácie:

fuzzy doplnok $\mathbf{c}(x) = 1 - x$, t.j. $A^c(\mathbf{x}) = 1 - A(\mathbf{x})$

t-norma $\mathbf{T}$, t.j. $(A \cap B)(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(A(\mathbf{x}),B(\mathbf{x}))$

t-konorma **S**, t.j. $(A \cup B)(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(A(\mathbf{x}),B(\mathbf{x}))$.

Namiesto podrobnejšieho popisu t-noriem a t-konoriem uvedieme len najpoužívanejšie typy.

Zadeh: $\mathbf{T}(x,y) = \min(x,y)$, $\mathbf{S}(x,y) = \max(x,y)$

Lukasiewicz: $\mathbf{T}(x,y) = \max(0,x+y-1)$, $\mathbf{S}(x,y) = \min(1,x+y)$

súčinové: $\mathbf{T}(x,y) = x.y$, $\mathbf{S}(x,y) = x + y - x.y$.

Typ fuzzy spojok sa mení podľa oblasti aplikácie, so snahou čo najviac sa priblížiť reálnej situácii. Napr. v kartografii, ak pre konkrétnu mapu **x** vieme, že jej informatívnosť je ohodnotená ako $I(\mathbf{x}) = 0.8$ a kvalita tlače ako $Q(\mathbf{x}) = 0.6$, potom kvalita $K = I \cap T$ tohoto kartografického diela bude pre

a) optimistu: $K(\mathbf{x}) = \min(I(\mathbf{x}),Q(\mathbf{x})) = 0.6$;

b) pesimistu: $K(\mathbf{x}) = \max(0,I(\mathbf{x})+Q(\mathbf{x})-1) = 0.4$;

c) "nezávislého": $K(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}).Q(\mathbf{x}) = 0.48$.

Koncept fuzzy mier zaviedol v r. 1974 Sugeno [3]. Fuzzy miera **m** je funkcia definovaná na klasických množinách, pričom $\mathbf{m}(\emptyset) = 0$ a ak A je podmnožinou množiny B, tak $\mathbf{m}(A) \leq \mathbf{m}(B)$. Každá pravdepodobnostná miera je fuzzy miera. Predstavme si teraz takúto situáciu: dvíhame 40 kg závažia. Ja (ako **x**) som schopný zdvihnúť len 30 kg, to isté môj kolega (ako **y**). Takto pre mieru **m** popisujúcu počet zdvihnutých závaží platí $\mathbf{m}(\{\mathbf{x}\}) = \mathbf{m}(\{\mathbf{y}\}) = 0$, ale $\mathbf{m}(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) = 1$ (spolu jedno zdvihneme). Toto **m** je príkladom neaditívnej fuzzy miery. Kým miery popisujú stav daného systému, naše pozorovania systému su popísané funkciami. Globálnu informáciu o systéme nám dáva integrál. Pre fuzzy miery (a nezáporné funkcie) sa najčastejšie používajú dva typy integrálov:

a) Sugenov integrál

$$(S) - \int f \, dm = \sup_{a > 0} (\min(a, m(\{f \geq a\}))) ; \qquad /1/$$

b) Choquetov integrál

$$(C) - \int f \, dm = \int_0^\infty m(\{f \geq a\}) \, da, \qquad /2/$$

kde pravá strana je nevlastný Riemannov integrál.

Hodnotenie kvality kartografických diel

Komplexné hodnotenie kvality kartografických dát, resp. diel je častým námetom vedeckého skúmania, aj keď je zväčša založené na subjektívnych analýzach príslušných expertov. Z niektorých známych metód hodnotenia spomeňme napr. Hájek a kol. [1]. Nedávno, Tanaka a Sugeno [4] navrhli model hodnotenia kvality kartografických diel založený na fuzzy mierach a Choquetovom integrále (poznamenajme, že v pôvodnom článku [4] ide o hodnotenie tlačených farebných obrázkov). Stručne popíšeme tento model.

Najprv skupina expertov kvalitatívne porovná vybranú skupinu kartografických diel z hľadiska jednotlivých kritérií (napr. informatívnosť v určených oblastiach, farebnosť, kontrastnosť a pod.). Porovnávajú sa vždy dvojice vzhľadom na danú vlastnosť. Pre dané dielo k a vlastnosť A, expert porovná dielo k s dielom j, pričom určí hodnoty $k_A(j)$ takto:

- ak k je v A výrazne lepšie ako j, tak $k_A(j) = 2$;
- ak k je v A o niečo lepšie ako j, tak $k_A(j) = 1$;
- ak k je v A zhruba rovnaké ako j, tak $k_A(j) = 0$;
- ak k je v A o niečo horšie ako j, tak $k_A(j) = -1$;
- ak k je v A výrazne horšie ako j, tak $k_A(j) = -2$.

Celkový výsledok k u vlastnosti A je vyjadrený hodnotou

$$\mathrm{SCORE}(A,k) = \sum_{j \neq k} k_A(j) + 2.(n-1), \qquad /3/$$

kde n je počet hodnotených diel.

Takto SCORE nadobúda len nezáporné hodnoty. Teraz určíme priemernú hodnotu PSCORE (podľa počtu hodnotiacich expertov). Podobne spracujeme globálne hodnotenie kvality vzorkových kartografických diel. Výsledné hodnoty označíme E(k) .

Faktorovou analýzou aplikovanou na hodnoty PSCORE zistíme skupiny vlastností s vysokou koreláciou. Skupiny označíme ako $s_1, s_2, \dots, s_r$.

Vypočítame ohodnotenie jednotlivých skupín

$$h(s_i,k) = \sum_{A \in s_i} \mathrm{PSCORE}(A,k). \qquad /4/$$

Nech **m** je daná fuzzy miera. Pre jednotlivé vzorkové kartografické diela vypočítame Choquetov integrál

$$C(k) = (C) - \int h(s,k)\, dm(s). \qquad /5/$$

Poznamenajme, že ak $h(s_1) = a_1 \leq h(s_2) = a_2 \leq \ldots \leq h(s_r) = a_r$, potom $C(k) = a_1.\mathbf{m}(\{s_1,s_2,\ldots,s_r\}) + (a_2-a_1).\mathbf{m}(\{s_2,\ldots,s_r\})+\ldots+(a_r-a_{r-1}).\mathbf{m}(\{s_r\})$.

Fuzzy mieru μ určíme metódou najmenších štvorcov (pomocou kvadratického programovania) tak, aby výraz

$$\sum_k (E(k) - C(k))^2$$

bol minimálny.

Po určení fuzzy miery μ (pomocou vzorkovej skupiny) používame túto pri určovaní globálneho hodnotenia kartografických diel (nevzorkových) z lokálnych ohodnotení jednotlivých expertov. Uvedený dvojstupňový model vykazuje väčšiu stabilitu, ako jednostupňové hodnotenia. Bližšie podrobnosti možno nájsť v práci Tanaka a Sugeno [4].

Podobný model bude zrejme možné aplikovať aj pri tvorbe komplexných kartografických diel na podklade jednotlivých databáz (základné prvky, tematické prvky - vodstvo, komunikácie, sídelné jednotky, atď.).

Fuzzy čísla

Maximálna chyba polohy bázy dát v GIS sa skladá z chyby kartografického zobrazenia, z chyby merania, znázornenia, digitalizácie a z chyby spracovania bázy dát. Doterajšie kvantitatívne kartografické metódy sú založené na reálnych číslach a klasickej aritmetike. Prípadná neurčitosť je modelovaná pravdepodobnostne (náhodné premenné, nezávislosť, pričom chyby popisuje štandardná odchýlka atď.), čo je najmä v prípade subjektívnych odhadov diskutabilné.

Alternatívny prístup možno založiť na pojme fuzzy čísel a fuzzy aritmetiky. Fuzzy čísla sú fuzzy podmnožiny reálnej osi. Najčastejšie sa používajú fuzzy čísla trojuholníkového, lichobežníkového a kumulatívneho typu. Tak napr. fuzzy číslo p = "asi desať" možno v trojuholníkovom tvare reprezentovať ako funkciu

$$p(x) = \max(0{,}1 - |x - 10|).$$

Neurčitosť tohto fuzzy čísla je 1 (pre čísla vzdialené od 10 o viac ako 1 je už p(x) nulové). Klasické reálne čísla majú neurčitosť rovnú nule. Pre súčet dvoch fuzzy čísel $r = p \oplus q$ požívame t-normy,

$$r(x) = \sup_{z \in \mathbf{R}} T(p(z), q(x - z)), \qquad /6/$$

kde **T** popisuje logickú konjunkciu (pričom r(x) je najväčšia z hodnôt popisujúcich situáciu, že p je z a q je x - z). Podľa typu zvolenej t-normy **T** môžeme usmerniť výslednú neurčitosť uvažovaného súčtu. V prípade Zadehovho minima je výsledná neurčitosť maximálna, rovná sa súčtu vstupných neurčitostí (podobne ako disperzia súčtu nezávislých náhodných premenných). V prípade Lukasiewiczovej t-normy je výsledná neurčitosť minimálna, rovná sa maximálnej vstupnej neurčitosti. Viac podrobností možno nájsť v odbornej literatúre, napr. Klir a Folger [2].

LITERATÚRA

1. HÁJEK, M., MESIAR, R., KELNAR, B.: Rozvoj kartografie na SVŠT v Bratislave. Geod. a kartogr. obzor, 34/76, 1988, č. 2, s. 44-47.
2. KLIR, G.J., FOLGER, T.A.: Fuzzy sets, uncertainty and information. Prentice Hall, Engelwood Cliffs, 1988.
3. SUGENO, M.: Fuzzy measures and fuzzy integrals. PhD. Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
4. TANAKA, K., SUGENO, M.: A study of subjective evaluations of printed color images. Int. J. Approximate Reasoning, 5, 1991 , s. 213-222.
5. ZADEH, L.A.: Fuzzy sets. Inform. Control, 8, 1965, s. 338-353.

Summary

On some possible applications of fuzzy set theory in cartography

Subjective decision making is a basis of several cartographical activities. Theory of fuzzy sets and fuzzy measures is well adapted for situations where subjective decision making is necessary and thus several fuzzy applications in the cartography can be expected. A two-layer model of subjective evaluation of printed color images (and thus of cartographical works, too) based on fuzzy measures and the Choquet integral is described. Further, fuzzy numbers are proposed as an alternative approach to the measurements evaluations for cartographical purposes.

Lektoroval:
Prof. Ing. RNDr. Lubomír Kubáček, DrSc.,
Matematický ústav Slovenskej akadémie vied,
Bratislava