

Ján VALKO, Zuzana ORSÁGOVÁ

SLOVENSKO V KARTOGRAFICKÝCH ZOBRAZENIACH
S MINIMÁLNÝMI DEFORMÁCIAMI

Vaľko Ján, Orságová Zuzana: Slovakia in Map Projections with Minimal Deformations. Kartografické listy, 1996, 4, 5 figs., 6 tabs, 4 refs.

Abstract: The splitting of Czechoslovakia into two independent states offers the question of the new map projection of Slovakia. From among 3 analyzed cartographic projections, the most acceptable with regard to distortions are Tissot's projections with minimal deformation.

Keywords: Map projections, stereographic projections, conformal conic projections, line scale factor, area distortion, angular distortion, coordinate systems.

1. Úvod

Po rozdelení Československa na dva samostatné celky sa z matematicko-kartografického hľadiska stáva opäť aktuálnou otázka nového výhodnejšieho zobrazenia územia Slovenskej republiky. Pre bývalý pretiahnutý tvar územného celku Čiech, Slovenska a Podkarpatskej Rusi v smere kartografickej rovnobežky bolo najvýhodnejšie Křovákovo všeobecné konformné kužeľové zobrazenie. Súčasná geografická rozloha Slovenska je daná hraničnými rovnobežkami $\varphi_j = 47^{\circ}44'$ a $\varphi_s = 49^{\circ}37'$ a poludníkmi $\lambda_z = 16^{\circ}50'$ a $\lambda_v = 22^{\circ}34'$, ktorých šírkový rozsah $1^{\circ}53'$ je v porovnaní s kartografickým šírkovým rozsahom v Křovákovom zobrazení menší o takmer $40'$. Z dôvodov zmeny tvaru a veľkosti nášho územia bolo vytvorených niekoľko rôznych kartografických zobrazení, ktoré sa snažili obmedziť kartografické skreslenie na minimum, t.j. na hodnotu grafickej presnosti $0,1$ mm (čo napr. v mierke mapy 1:1000 znamená 10 cm/km) a zabezpečiť najľahší prevod z priamo nameraných súradníc v teréne do roviny a naopak.

Pre účely geodetickej kartografie a pre mapy veľkých a stredných mierok malých území, medzi ktoré radíme aj Slovensko, navrhujeme v súčasnosti konformné zobrazenia. Používame jednoduché konformné zobrazenia: stereografické (azimutálne), kde izometrické čiary tvoria kružnice, alebo valcové či kužeľové, kde tieto čiary sú rovnobežné s osou zobrazenia. V závislosti od tvaru územia dáva každé zobrazenie rôzne maximálne skreslenie dĺžok v bode najvzdialenejšom od stredu alebo osi zobrazenia. N.A. Tissot ukázal, že existuje ešte nekonečne mnoho zobrazení daného územia, na ktorých izometrické čiary tvoria kužeľosečky (elipsy alebo hyperboly) a zvyčajné jednoduché zobrazenia sú len ich medznými prípadmi. Zo všetkých možných zobrazení potom existuje jedno, ktoré má najmenšiu možnú hodnotu najväčšieho dĺžkového skreslenia na uvažovanom území. Problémom "zobrazení s minimálnymi deformáciami" sa zaoberalo viacero autorov, ako napríklad Tissot, Laborde a Vanssay [1]. Ako dodatok k návrhom na zobrazenie ČSR v roku 1935 riešili túto otázku aj J. Böhm a F. Fiala. Už vtedy sa ukázalo, že pre nepravidelný tvar Československa nemôže eliptické zobrazenie nahradiť zobrazenie šikmé valcové alebo kužeľové. Československo sa rozdelilo na dva samostatné celky a osamostatnený tvar územia Slovenska tak poskytol novú úlohu pre voľbu zobrazenia. Bude po zmene tvaru územia eliptické

Ing. Ján VALKO, CSc., Zuzana ORSÁGOVÁ, Katedra mapovania a pozemkových úprav, Stavebná fakulta STU, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, tel.: + 42-7-394330, fax: + 42-7-394116

zobrazenie výhodnejšie čo do deformácií, ako po desaťročia budované mapové dielo v S-JTSK - v Křovákovi zobrazení?

Predložená práca má prispieť k diskusií o danej problematike.

Pre podrobnejšiu analýzu sme zvolili zo skupiny "zobrazení s minimálnymi deformácia mi" tieto kartografické zobrazenia:

1. Labordeovo konformné zobrazenie s minimálnymi deformáciami dĺžok,
2. Tissotovo zobrazenie s minimálnymi deformáciami dĺžok,
3. Vanssayovo zobrazenie s minimálnymi korekciami smerníkov.

2. Labordeovo konformné zobrazenie s minimálnymi deformáciami dĺžok

Laborde vychádza z podmienky konformity medzi symetrickými súradnicami X, Y v rovine zobrazenia a symetrickými súradnicami x, y na referenčnej guľovej ploche. Sférické symetrické súradnice môžeme transformovať na rovinné nekonečne mnohými spôsobmi a dostať tak nekonečne mnoho konformných zobrazení. Medzi oboma sústavami súradníc platí vzťah:

$$X + iY = f(x + y) \quad 2.1$$

Dotyková rovina v bode O (priesečník základného poludníka a základnej rovnobežky) predstavuje zobrazovaciu rovinu a tiež počiatok rovinných súradníc (X, Y) . Súradnicové osi sú dotyčnicami k základnému poludníku a k základnej rovnobežke.

Jednotlivé koeficienty mocninového radu riešenia rovnice 2.1 (A-H) nie sú určené, ale vyplývajú nám z podmienok, ktoré budeme požadovať od zobrazenia (medzi nimi je aj podmienka minimálnych deformácií dĺžok).

1. Podmienka spoločného počiatku O pre rovinné a sférické súradnice:

$$x = y = 0, X = Y = 0, A = 0, B = 0 \quad 2.2$$

2. Osi X, Y sú dotyčnicami v bode O k osiam x, y . V bode O ($x = y = 0$) sú smernice dotyčníc nulové.

3. Dĺžkové skreslenie musí byť vo všetkých smeroch rovnaké.

4. V počiatku O platí: $m_0 = 1$ a zanedbaním členov prvého rádu pre mierku zobrazenia (čo je obvyklé u všetkých zobrazení), dostaneme ďalšiu podmienku:

$$C = 1, E = F = 0 \quad 2.3$$

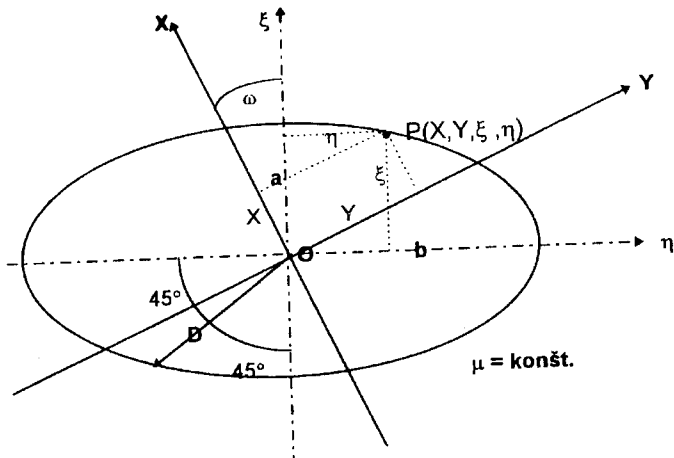
Modul dĺžkového skreslenia je vyjadrený vzťahom:

$$m = 1 + 3GX^2 - 6HXY + \dots \quad 2.4$$

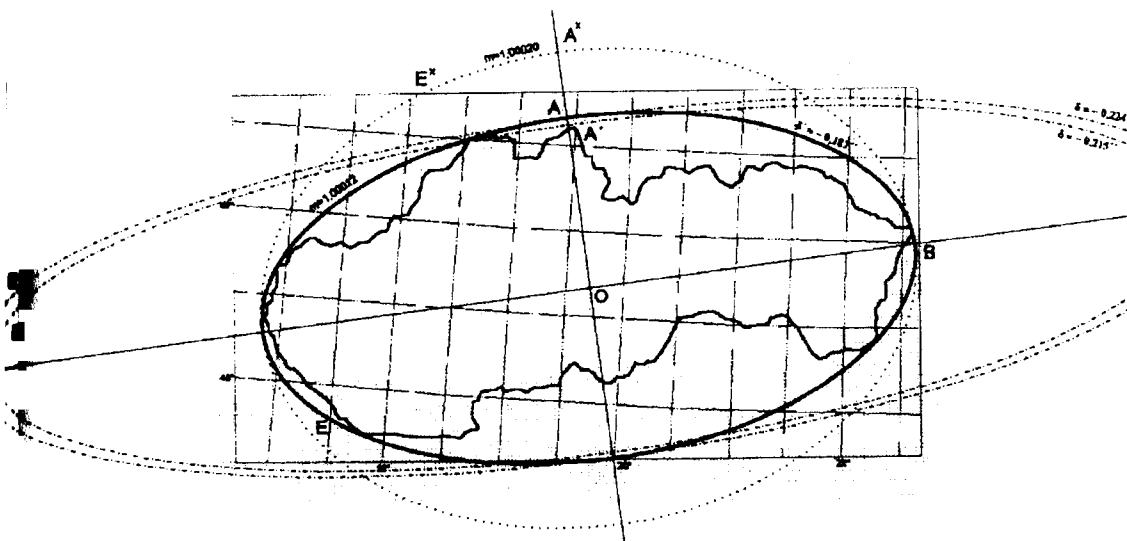
Krivky rovnakého dĺžkového skreslenia (izometrické čiary) dostaneme po dosadení rôznych hodnôt $v = m - 1$ do výrazu pre pomerné skreslenie dĺžok. Izometrické čiary sú kužeľosečkami (na rozdiel od jednoduchých zobrazení, kde sú to čiary rovnobežné s osou zobrazenia, alebo sústredné kružnice) so spoločným stredom v počiatku O , spoločnými osami a, b , ktoré zvierajú s osami súradníc X, Y uhol ω - pozri obr. 1 a obr. 2.

Skreslenie platí po celom obvode elipsy ako aj v bode $P(X, Y, \eta, \xi)$, kde $\eta = \xi = D/\sqrt{2}$ a kde D je polovička diametrály, políaca pravý uhol medzi η a ξ .

Konformné zobrazenia môžeme klasifikovať podľa tvaru izometrických čiar na zobrazenia:



Obr. 1 Labordeovo zobrazenie - súradnicový systém



Obr. 2 Labordeovo zobrazenie Slovenska s minimálnymi deformáciami

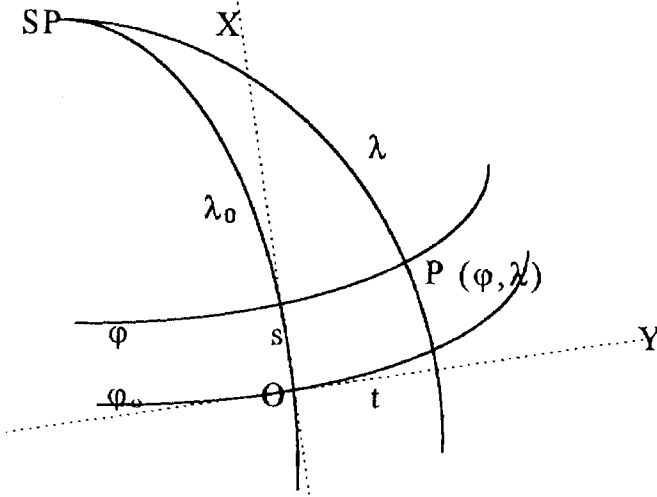
- stereografické,
- eliptické,
- parabolické (valcové),
- hyperbolické.

3. Tissotovo zobrazenie s minimálnymi deformáciami dĺžok

Tissot zvolil v priesečníku základného poludníka a základnej rovnobežky počiatok súradníc $O(s,t)$, ktoré sú dané oblúkom základného poludníka F_0 a základnej rovnobežky L_0 (obr. 3 a obr. 4). Prvé štyri podmienky sú zhodné s predchádzajúcim zobrazením. Tissot k nim pripája ďalšie:

5. Skreslenie dĺžok na poludníku a rovnobežke sa majú zhodovať v členoch druhého radu a líšiť až v členoch tretieho radu,

6. Skreslenie uhla medzi obrazom poludníka a rovnobežky je nezávislé od členov prvého a druhého radu.



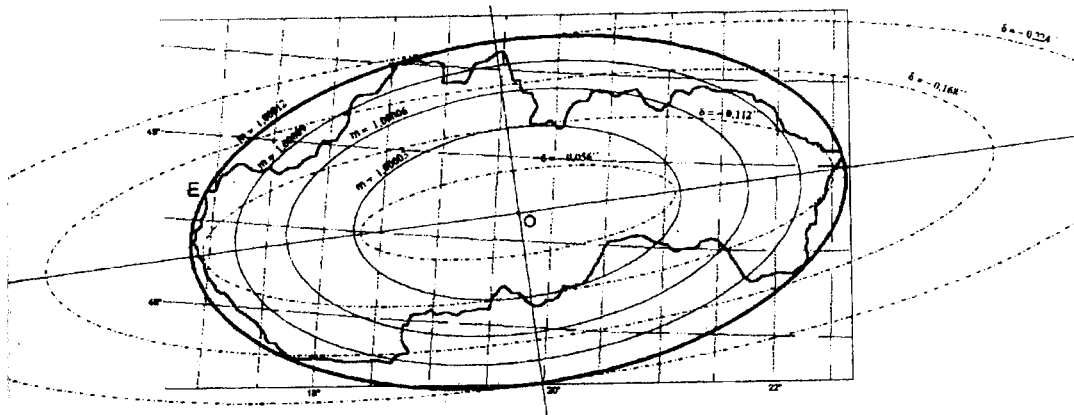
Obr. 3 Tissotovo zobrazenie - súradnicový systém

Hranice mapovaného územia obsiahne izometrická kružnica K_1 o polomere $D_1 = a = b$, ďalej hraničná elipsa K_2 s minimálnym diametrom D_2 , alebo dvojica rovnobežných priamok $K_3 = a\sqrt{2}$.

Číselné údaje pre Slovensko sú vypočítané a zostavené v tab. 1.

TAB. 1	$v = M$	$v = 0,75 M$	$v = 0,50 M$	$v = 0,25 M$
Izom. elipsy	(mm/km)	(mm/km)	(mm/km)	(mm/km)
HODNOTA	121	91	61	30
b (km)	216	187	152	108
a (km)	112	97	79	56
m	1,00012	1,00009	1,00006	1,00003

Pre Slovensko sme našli kužefosečku - elipsu E, ktorá obsahuje celé územie a najlepšie sa prímýká k jeho hraniciam. Pomocou tvaru elipsy a odklonu jej osi, ktoré určíme graficky, vypočítame koeficienty G, H, a tým určíme zobrazovacie rovnice eliptického zobrazenia minimálnych deformácií. Elipsa E je v Tissotovom (= Labordeovom) zobrazení, zvolená za zometrickú čiaru maximálnej mierky, alebo skreslenia dĺžok M (obr. 4).



Obr. 4 Tissotovo zobrazenie Slovenska s minimálnymi deformáciami

Hodnoty polosí a , b_x sú v tab. 2.

TAB. 2	$\delta_{MAX} = \Delta$	$\delta_{MAX} = 0,75\Delta$	$\delta_{MAX} = 0,50\Delta$	$\delta_{MAX} = 0,25\Delta$
Elipsy red. smer.	($''/km$)	($''/km$)	($''/km$)	($''/km$)
HODNOTA	- 0,224	- 0,168	- 0,112	- 0,056
b_x (km)	417	313	208	104
a (km)	112	84	56	28

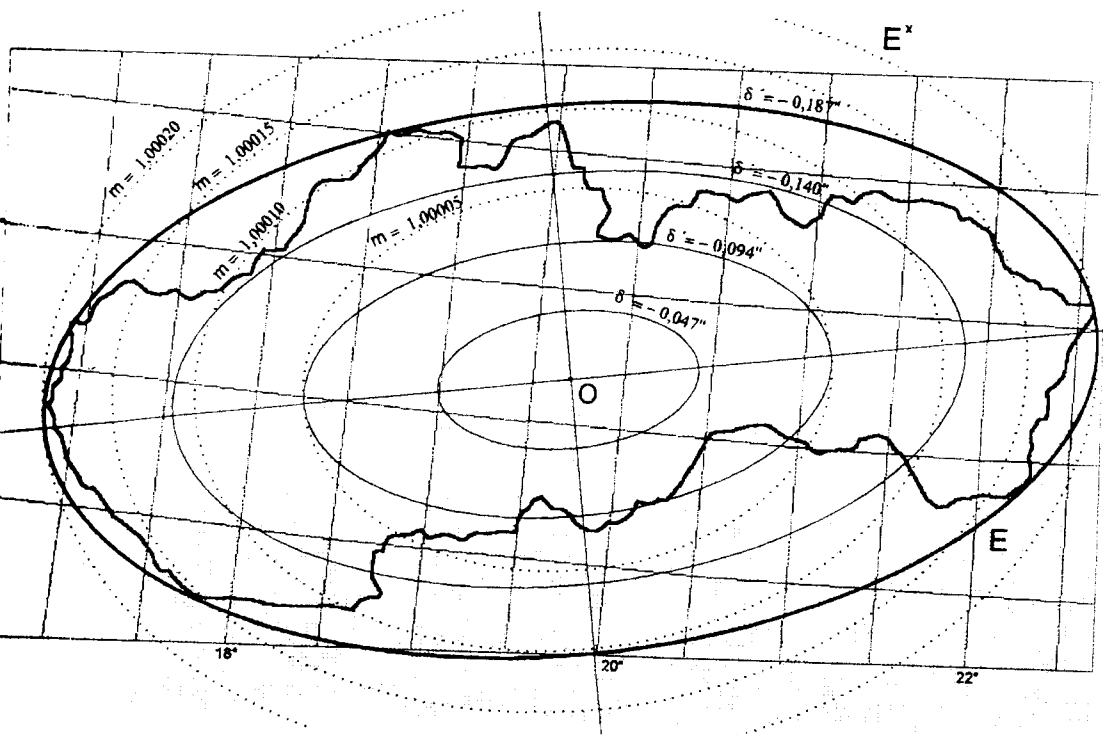
4. VANSAYOVO ZOBRAZENIE MINIMÁLNYCH KOREKCIÍ SMERNÍKOV

Redukcia nameraných smerníkov, krivých obrazov trigonometrických strán na smerníky ich tetív je najčastejšou redukciov elipsoidických veličín do zobrazovacej roviny. Otázkou zníženia týchto redukciov na minimum sa zaoberal Vanssay.

Vanssayovo zobrazenie minimálnych korekcií smerníkov opäť predpokladá najst kužefosečku najlepšie sa prímýkajúcu k hraniciam daného územia, t.j. Slovenska. Priebeh izočiar vidíme na obr. 5. Hodnoty dĺžkových skreslení a redukciov smerníkov sú v tab. 3 a tab. 4 a zobrazené na obr. 5.

TAB. 3	$v = M_x$	$v = 0,75 M_x$	$v = 0,50 M_x$	$v = 0,25 M_x$
Izom. elipsy	(mm/km)	(mm/km)	(mm/km)	(mm/km)
HODNOTA	196	147	98	49
b (km)	216	187	153	108
a _x (km)	156	135	110	78
m	1,00020	1,00015	1,00010	1,00005

TAB. 4	$\delta_{MAX}' = \Delta$	$\delta_{MAX}' = 0,75\Delta$	$\delta_{MAX}' = 0,50\Delta$	$\delta_{MAX}' = 0,25\Delta$
Elipsy red. smer.	(''/ km)	(''/ km)	(''/ km)	(''/ km)
HODNOTA	- 0,187	- 0,140	- 0,094	- 0,047
b (km)	216	162	108	54
a (km)	112	84	56	28



Obr. 5 Vanssayovo zobrazenie Slovenska s minimálnymi korekciami smerníkov

5. Záver

Pre zhodnotenie jednotlivých parametrov analyzovaných kartografických zobrazení sú vypočítané hodnoty zostavené v tab. 5.

Tab. 5

Zobrazenie	M (mm)	δ ''
stereografické	286	-0,274
valcové (šikmé)	109	-0,238
min. deformácií dĺžok	121	-0,215
min. korekcií smerníkov	196	-0,187

Na základe vykonaných výpočtov vidíme, že eliptické Tissotovo zobrazenie najviac znižuje deformácie dĺžok v porovnaní so stereografickým a valcovým zobrazením. Pri pomere osi $b/a = 2$ dosiahne toto zniženie až 33% a pre Slovensko 21%.

V Tissotovom zobrazení obr. 3 prechádza bodom B^I elipsa E^I , územie však obsiahne menšia elipsa E^{II} idúca bodom B^{II} . Pretože teraz $b_x = OB^{II} = 400$ km, bude najväčšia korekcia smerníkov - 0,215''/km.

V závere možno konštatovať, že v dôsledku pretiahnutého tvaru nášho územia dosiahneme najlepšie skreslenia voľbou valcového zobrazenia vo všeobecnej polohe, alebo kužeľového zobrazenia. Voľbou jednoduchých zobrazení [3], by sa zjednodušili niektoré výpočty a taktiež hodnoty skreslení. Zobrazenia minimálnych deformácií majú značný teoretický význam. Dopĺňajú teóriu zobrazovaní po stránke deformácií a ukazujú súvislosť stereografického a valcového zobrazenia. Dávajú nové klasifikačné kritérium zobrazenia.

Až zavedenie nového referenčného systému pre Slovensko po predošlých štúdiách aplikácií vhodných kartografických zobrazení nám upresní odpoveď na otázku predloženú v úvode tejto práce.

LITERATÚRA

- [1] Böhm, J.: Matematická kartografie, II. díl, Brno, Donatův fond VŠT Dr. E. Beneše 1951.
- [2] Daniš, M., Vaľko, J.: Matematická kartografia, Bratislava Edičné stredisko SVŠT 1980.
- [3] Žiaková, A.: Návrh kartografického zobrazenia Slovenska. /Diplomová práca./ Bratislava, STU 1995.
- [4] Smka, E.: Matematická kartografie, Brno, VAAZ 1977.

S u m m a r y

Slovakia in map projections with minimal deformations

The article concentrates the focus on the cartographic projection application of minimizing deformation in Slovakia. Showed isoline are basically expressed numerically and graphically.

As a source of analysing the cartographical projection its presented :

1. Laborde conformal projection of distortion minimizing lenght,
2. Tissot projection of minimizing deformation lenght,
3. Vanssay projection minimizing correction pointer.

Concerning the group of cartographical projections the most suitable one is Tissot's projection.

Fig. 1 Laborde projection - coordinate system,

Fig. 2 Tissot projection - coordinate system,

Fig. 3 Laborde projection of Slovakia minimizing deformation,

Fig. 4 Tissot projection of Slovakia minimizing deformation,

Fig. 5 Vanssay projection of Slovakia minimizing correction pointer.

Lektoroval:

**Ing. Jaroslav VAŠEK,
VKÚ, š.p. Harmanec**