

Alexandra BENOVÁ, Jerguš MORAVČÍK

VLASTNOSTI INTERPOLAČNÝCH METÓD POUŽITÝCH NA MODELOVANIE GEORELIÉFU A ICH VPLYV NA VÝPOČET MORFOMETRICKÝCH PARAMETROV

Moravčík Jerguš, Benová Alexandra: The Properties of Interpolation Methods Used for Georelief Modeling and Its Influence on the Calculation of Morphometric Parameters. Kartografické listy, 1999, 7, 10 figs., 7 refs.

Abstract: The article deals with mathematic modelling of georelief concerning accuracy of enumerating of morphometric parameters of georelief. We observed the influence of different formulas used for setting values of the first partial derivatives of approximate function to the accuracy of georelief model. The variances have been studied using our own implementation of C1 continuous B-spline interpolation of regular discrete data field and Kriging implemented in Surfer.

Keywords: Morphometric parameters of georelief, B-spline interpolation surface, digital terrain model.

1. Náčrt problému

Predmetom príspevku je presnosť modelovania georeliéfu ako geometrickej plochy, vyjadreného množinou morfolometrických veličín G_{RF} , pomocou digitálnych modelov na základe vybraných aproximačných funkcií dvoch premenných bez parametra času T .

Stanovenie presnosti modelovania množiny G_{RF} je z hľadiska interdisciplinárneho prístupu dôležité preto, lebo jej jednotlivé prvky, tvorené morfolometrickými veličinami georeliéfu, vstupujú ako premenné parametre do vzťahov závislosti vplyvu georeliéfu na priestorovú diferenciaciu geoekologických procesov. Presnosť modelovania je však dôležitá aj v iných geovedných a vedecko-technických disciplínach, predmetom záujmu ktorých je štúdium vplyvu georeliéfu na objekty alebo procesy, ako aj na aktivitu človeka v priestore.

Georeliéf (reliéf Zeme) je dynamický systém, ktorý je na jednej strane výslednicou modelačných procesov a na druhej strane svojimi morfolometrickými parametrami tieto procesy priestorovo ovplyvňuje. Ako dynamický subsystém krajiny ho v zmysle práce J. Krcha (1990) môžeme vo formalizovanom tvare vyjadriť systémom rovníc vyjadrujúcich interakciu jednotlivých zložiek krajiny. Vo zvolenej mierke $1:M_i$ a jej zodpovedajúcej rozlišovacej úrovni U_i z pragmatického hľadiska po určitú časovú dobu ΔT_i ho v zmysle uvedených prác môžeme uvažovať ako statický systém, pretože zmeny na georeliéfe sú v rámci tejto časovej doby ΔT_i pod rozlišovacou úrovňou U_i zodpovedajúcej zvolenej mierke $1:M_i$. Počas tohto časového intervalu môžeme georeliéf vyjadriť matematickou funkciou dvoch premenných vo všeobecnom tvare:

$$z = f(x, y), \text{ resp. } z = z(x, y) \quad (1)$$

bez parametra času T . Jej analytický tvar siete nie je známy, ale umožňuje formulovať všetky potrebné štruktúrne vlastnosti georeliéfu a na ich základe vo všeobecnom tvare korektné odvodiť požadované funkčné vzťahy pre jednotlivé morfolometrické parametre georeliéfu.

V digitálnych modeloch georeliéfu (DMG) je táto funkcia nahradená aproximačnými resp. interpolačnými funkciami:

$$z = P_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

ktorými modelujeme georeliéf na základe nameraného reprezentatívneho vstupného diskretného bodového poľa (DBP) výšok.

Aproximačné funkcie modelujú reliéf na základe konečného počtu bodov s nameranou výškou, ktoré v DMG tvoria vstupný súbor bodov tvoriacich vstupné DBP výšok. Presnosť výsledku závisí však od modelovacej funkcie, od hustoty DBP výšok, a najmä od jeho štruktúry. Na docielenie presnejšieho výsledku je treba pravidelné DBP nahradiť nepravidelným DBP, hustota ktorého vo zvolenej mierke 1:M_i a jej zodpovedajúcej rozlišovacej úrovni U_i zohľadňuje geometriu georeliéfu. Iná možnosť je zahusťenie pravidelného DBP poľa tak, aby bola hustota jeho bodov v priemere optimalizovaná vzhľadom na mierku mapy a geometriu georeliéfu. Tento postup je však náročný na výpočtovú techniku a narába s veľkou redundanciou dát. Napriek tomu majú pravidelné DBP z hľadiska niektorých aproximačných funkcií vhodné vlastnosti.

V práci je načrtnutý problém modelovania georeliéfu vybranou aproximujúcou funkciou na základe pravidelného vstupného DBP tvoriaceho štvorcovú sieť. Načrtnutý problém bol pritom študovaný na modelovom území v mierke 1:10 000, z ktorého boli namerané vstupné bodové dáta (x, y, z) a súradnice) z rohových bodov pravidelnej štvorcovej siete 50 m × 50 m. Modelové územie (mapový list 44-22-13) predstavuje vybranú časť územia ležiaceho na východnej strane Malých Karpát v oblasti medzi Veľkým Javorníkom a Svätým Jurom. Na tomto území boli študované vlastnosti vybraných interpolačných postupov z hľadiska ich vplyvu na presnosť výpočtu numerických hodnôt parciálnych derivácií prvého rádu z_x, z_y, a tým aj na presnosť výpočtu dvoch základných morfometrických parametrov georeliéfu (MPG) - sklonu georeliéfu γ_N v smere spádových krieviek a orientácie georeliéfu voči svetovým stranám. Tieto tvoria v zmysle práce J. Krcha (1990) dva základné prvky množiny MPG G_{RF} uvažovaného ako subsystém krajiny.

2. Georeliéf ako subsystém fyzickogeografickej sféry uvažovanej ako priestorovo organizovaný systém S_{FG}

Fyzickogeografickú sféru chápeme v zmysle práce J. Krcha (1990) ako priestorovo organizovaný, látkovo-energetický a informačný systém S_{FG}, ktorý pozostáva z množiny prvkov G_{FG} a z množiny vzťahov R_{FG} medzi prvkami vo vnútri množiny G_{FG} a medzi prvkami a okolím systému g₀. Do okolia systému g₀ patrí jednak vnútro Zeme pod dolnou hranicou FG sféry a vysoké vrstvy atmosféry nad hornou hranicou FG sféry, ako aj priľahlý kozmický priestor. Systém S_{FG} vyjadríme v tvare usporiadanej dvojice:

$$S_{FG} = \{G_{FG}, R_{FG}\}, \text{ kde } G_{FG} = \{Ga_1, Ga_2, Ga_3, Ga_4, Ga_5\}$$

$$R_{FG} = \begin{pmatrix} Ra_{11}, Ra_{12}, \dots, Ra_{15} \\ Ra_{21}, Ra_{22}, \dots, Ra_{25} \\ \dots \\ Ra_{k1}, Ra_{k2}, \dots, Ra_{55} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kde jednotlivé podmnožiny Ga_k ∈ G_{FG}, k = 1, 2, ..., 5 reprezentujú vo fyzickogeografickej sfére jednotlivé čiastkové sféry, ktoré sú vo vzájomnej interakcii a ktoré sú subsystémami systému S_{FG}, pričom Ga₁ - atmosféra, Ga₂ - hydrosféra, Ga₃ - litosféra, Ga₄ - pedosféra, Ga₅ - biosféra. R_{FG} je matica štruktúry systému S_{FG}, ktorá vyjadruje vzťahy medzi jednotlivými zložkami FG sféry uvažovanými v zmysle prác J. Krcha (1968, 1990) ako priestorovo organizované subsystémy Sa_k vyjadrené v tvare usporiadaných dvojíc Sa_k = {Ga_k, Ra_k}, k = 1, 2, ..., 5, ktoré sú vo vzájomnej interakcii. V týchto usporiadaných dvojiciach Ra_k vyjadrujú pre k = 1, 2, ..., 5 maticu štruktúry subsystému Sa_k. Matica štruktúry R_{FG} potom vyjadruje práve túto interakciu jednotlivých subsystémov.

Osobitným subsystémom v systéme S_{FG} je georeliéf, ktorý je predmetom nášho záujmu. Môžeme ho chápať ako zvláštny nehmotný subsystém krajiny S_{RF}. Jeho vyjadrenie je v tvare usporiadanej dvojice S_{RF} = {G_{RF}, R_{RF}}, v ktorej G_{RF} je množina prvkov, z ktorých tento subsystém pozostáva a ktoré sú podrobnejšie rozvedené v ďalšej časti práce. R_{RF} je množina vzájomných závislostí, a to medzi prvkami množiny G_{RF} navzájom, ako aj medzi prvkami množiny G_{RF} a ostatnými subsystémami S_{FG} (Krcho 1990).

Georeliéf ako subsystém S_{RF} systému S_{FG} najvýznamnejšie vplyva na ostatné subsystémy Sa_k prostredníctvom svojich morfometrických parametrov (Krcho 1990).

Ak však pri formalizovanom vyjadrení georeliéfu neuvažujeme o premennom parametre času T , ale iba o polohe, potom z takto formulovaného hľadiska je georeliéf uvažovaný ako statický systém, v ktorom priestorové rozloženie výšok je v súradnicovej sústave $(0, x, y, z)$ iba funkciou polohy x, y , ale nie funkciou času T . V tomto zmysle sú potom aj všetky MPG statickými veličinami, ktoré sú navzájom prepojené funkčnými závislosťami a sú zároveň funkciami polohy, ale sú konštantné v čase T . Tento prístup umožňuje štúdium vplyvu MPG na priestorovú diferenciaciu procesov v krajine, ale neumožňuje študovať vplyv ostatných zložiek krajiny na priestorové zmeny georeliéfu v priebehu času T .

3. Morfometrické parametre georeliéfu ako jeho stavové veličiny

Definícia georeliéfu ako zvláštneho priestorovo organizovaného subsystému S_{RF} tvoriaceho súčasť FG sféry ako systému S_{FG} je v práci J. Krcha (1990).

Ak v zmysle uvedených prác georeliéf uvažujeme ako jednu zo sfér FG sféry, môžeme ho na určitej rozlišovacej úrovni definovať ako pevné, ale pritom dynamické rozhranie medzi litosférou, resp. pedosférou na jednej strane a atmosférou, resp. hydrosférou na druhej strane. Suchozemský reliéf je tvorený pevným, ale dynamickým rozhraním medzi litosférou, resp. pedosférou na jednej strane a atmosférou na druhej strane. Rozhranie medzi litosférou a hydrosférou predstavuje reliéf morského dna, jazerný reliéf a reliéf riečnych koryt. Špeciálnym prípadom takto uvažovaného rozhrania je ľadovcový reliéf ako rozhranie medzi litosférou a hydrosférou v pevnej fáze. Priestorový priebeh takto definovaného georeliéfu je výslednicou dlhodobej interakcie medzi týmito sférami, ktoré predstavujú jednotlivé subsystémy S_{sk} systému S_{FG} . Na základe toho môžeme povedať, že georeliéf je v každom časovom momente a v každej svojej časti v priestore výslednicou procesov navzájom proti sebe pôsobiacich endogénnych a exogénnych síl.

Ako sme spomenuli, vlastnosti MPG výrazne ovplyvňujú priebeh, intenzitu a vlastnosti geoekologických procesov prebiehajúcich v krajine na určitej rozlišovacej úrovni (Krcho, 1990). Z množiny geoekologických procesov väčší dôraz položíme na eróžno-denudačné procesy, význam ktorých narastá s čoraz intenzívnejším využívaním krajiny človekom a so snahou ochrany krajiny pred negatívnymi dopadmi spomenutých procesov na aktivity človeka, akými sú napr. vodná erózia pôdy, ktorá predstavuje environmentálny problém. Na čo možno najpresnejší výpočet priestorového rozloženia rôznych stupňov a rizík vodnej erózie pôdy a ich kartografického modelovania je (ako jeden zo základných predpokladov) potrebná znalosť dostatočne presného rozloženia hodnôt jednotlivých MPG. Preto je snaha modelovať reliéf s jeho morfometrickými parametrami ako prvkami množiny G_{RF} s čo najväčším priblížením k jeho skutočnému priebehu v priestore. Získame tak aj presné hodnoty MPG, na základe ktorých môžeme presnejšie skúmať a simulovať eróžno-denudačné procesy v prostredí GIS a predpovedať zmeny, či negatívne dopady na krajinu. Eróžno-denudačné procesy môžeme definovať ako exogénne procesy prebiehajúce na zemskom povrchu v gravitačnom poli Zeme, spôsobujúce časové a priestorové zmeny MPG.

4. Vplyv morfometrických parametrov georeliéfu na eróžno-denudačné procesy

Medzi morfometrickými parametrami a eróžno-denudačnými procesmi existuje silná vzájomná závislosť. MPG ako prvky množiny G_{RF} subsystému S_{RF} sú vyjadrené funkčnými vzťahmi, v ktorých vystupujú derivácie 1. a 2. rádu. Od ich presnosti závisí aj presnosť výpočtu týchto MPG.

Množina MPG G_{RF} (Krcho 1990, 1999a, b) je určená prvkami

$$G_{RF} = \{z, \Delta z, s_n, \gamma_N, A_N, \omega, K_r, N_n F, K_r F, F, \dots\} \quad (4)$$

Jednotlivé parametre z množiny (4) sú navzájom medzi sebou prepojené a majú rôzny vplyv na eróžno-denudačné procesy, pričom jednotlivé symboly majú nasledujúci význam:

- z - nadmorská výška georeliéfu, ktorá je v (1) funkciou polohy x, y ,
- Δz - relatívna výška v smere spádových kriviek (vyjadruje vertikálnu členitosť georeliéfu),
- s_n - dĺžka spádových kriviek na svahu je dĺžka spádovej krivky na georeliéfe, uvažovaná od chrbátice po údolnicu. V práci M. Zlochu (1996) vypočítaná zhora nadol určuje ma-

ximálnu vzdialenosť, do ktorej sa môže presunúť materiál z daného bodu pôsobením gravitácie a povrchovým tokom vody, v opačnom smere, čiže zdola nahor, určuje dĺžku svahu.

γ_N - sklon georeliéfu v smere spádovej krivky:

$$\gamma_N = \arctg\left(\sqrt{z_x^2 + z_y^2}\right). \quad (5)$$

Je to parameter, ktorý má spomedzi všetkých morfometrických parametrov najväčší vplyv na erózo-denudačné procesy. Tieto procesy prebiehajú v smere spádových kriviek. Čím je väčší sklon, tým je svah náhlynejší na erózo-denudačné procesy.

A_N - orientácia georeliéfu voči svetovým stranám:

$$A_N = \arccos\left(\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}\right) z_y \leq 0, \quad A_N = 360^\circ - \arccos\left(-\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}\right) z_y > 0. \quad (6)$$

Orientácia georeliéfu vplyva na erózo-denudačné procesy sprostredkované cez rozdelenie priameho slnečného žiarenia, a tým aj cez hydrotermický režim pôd. Jej význam rastie najmä so zväčšujúcim sa sklonom.

ω - normálová krivosť georeliéfu v smere spádovej krivky:

$$\omega = -\frac{z_{xx}z_x^2 + 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_y^2}{(z_x^2 + z_y^2)\sqrt{(1 + z_x^2 + z_y^2)^3}}. \quad (7)$$

Normálová krivosť je významným morfometrickým parametrom vo vzťahoch na vyjadrenie priebehu a intenzity procesov svahovej modelácie v smere spádových kriviek.

K_r - horizontálna krivosť georeliéfu:

$$K_r = -\frac{z_{xx}z_x^2 - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_y^2}{\sqrt{(z_x^2 + z_y^2)^3}}. \quad (8)$$

Význam horizontálnej krivosti spočíva v jej vplyve na smer toku látky a energie, a tým na erózo-denudačné procesy.

N_nF - normálové formy georeliéfu sú definované normálovou krivosťou v smere spádových kriviek, ktoré sa podľa znamienka $\pm\omega$ vnútorne členia na N_nF_X - konvexné normálové formy v ktorých $\omega > 0$ a na N_nF_K - konkávne normálové formy v ktorých $\omega < 0$.

Normálová krivosť v smere spádovej krivky vplyva na erózo-denudačné procesy tým, že na konvexných normálových formách georeliéfu N_nF_X dochádza k urýchľovaniu a na konkávnych formách N_nF_K k spomaľovaniu pohybu toku látky a energie.

K_rF - horizontálne formy georeliéfu, definované horizontálnou krivosťou K_r , sa podľa znamienka $\pm K_r$ vnútorne členia na K_rF_X - konvexné horizontálne formy v ktorých $K_r > 0$ a K_rF_K - konkávne horizontálne formy v ktorých $K_r < 0$. Na konvexných horizontálnych formách georeliéfu dochádza k rozptyľovaniu a na konkávnych k sústredovaniu toku látky a energie.

Vzájomnými prienikmi oblastí normálových foriem N_nF_X , N_nF_K v smere spádovej krivky a horizontálnych foriem K_rF_X , K_rF_K dostávame celkové geometrické formy georeliéfu F . Tieto formy na jednej strane ovplyvňujú erózo-denudačné procesy a na strane druhej georeliéfu prostredníctvom týchto foriem pôsobí na ostatné zložky krajiny:

- F_{XX} ($\omega > 0$; $K_r > 0$) - urýchľujú a rozptyľujú tok látky a energie,
- F_{KX} ($\omega < 0$; $K_r > 0$) - spomaľujú a rozptyľujú tok látky a energie,
- F_{KK} ($\omega < 0$; $K_r < 0$) - spomaľujú a sústredujú tok látky a energie,
- F_{XK} ($\omega > 0$; $K_r < 0$) - urýchľujú a sústredujú tok látky a energie.

Z matematických vzťahov MPG z množiny G_{RF} , v ktorých vystupujú parciálne derivácie vyplýva, že pri modelovaní georeliéfu pomocou DMG záleží tak na presnosti vyjadrenia

priestorového rozloženia parciálnych derivácií $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ ako aj na presnosti výpočtu ich veľkosti, t.j. na polohovej a numerickej presnosti výpočtu prvkov množiny G_{RF} . To kladie nároky na vlastnosti interpolačných funkcií, od ktorých závisí presnosť výpočtu týchto derivácií. Dôležitosť presnosti výpočtu parciálnych derivácií vo funkčných vzťahoch jednotlivých MPG vyplýva z toho, že MPG vstupujú ako premenné do vzťahov pre výpočet eróznodenudačných procesov.

5. Modelovanie georeliéfu aproximačnými, resp. interpolačnými funkciami

$z = P_i(x, y)$ pomocou DMG bez parametra času

Polohová a numerická presnosť závisí od DBP výšok (jeho štruktúry a presnosti) a zároveň od výberu a implementácie aproximačnej funkcie. Vstupné DBP môže byť pravidelné (štvorcová sieť), alebo nepravidelné. Pravidelné DBP sú voči georeliéfu náhodné, a preto nikdy nebudú priestorovo reprezentatívne. V závislosti od hustoty siete môže byť buď informačne redundantné, alebo informačne podhustené. Ak chceme zlepšiť presnosť modelu, môžeme ho zjemniť, čo síce zlepší aproximáciu, ale zároveň zvýši redundanciu dát. Nepravidelné DBP - trojuholníková sieť - je vo všeobecnosti presnejšie. Takéto pole môže vzniknúť napr. na základe spádnicového modelu georeliéfu. Spádová krivka má okrem geometrického aj fyzikálny význam - je to krivka najväčšej zmeny gravitačného potenciálu; vrstevnica je spojnicou miest s rovnakým gravitačným potenciálom. Hustota takéhoto poľa je funkciou krivosti georeliéfu. Reprezentatívnosť nepravidelného DBP závisí od odchýlky veľkosti strany trojuholníka siete od zvislého rezu georeliéfu cez danú stranu trojuholníka. Limity povolenej odchýlky závisia od mierky a rozlišovacej úrovne výslednej mapy (Krcho 1990, 1999a,b). Vlastnosti vstupného DBP nie sú priamym predmetom tejto práce.

Aproximačné funkcie prinášajú do modelu väčšie či menšie chyby, ktoré vyplývajú z jej matematickej štruktúry. Aproximačných funkcií je veľa a z predchádzajúcej časti vyplýva, že na presné modelovanie georeliéfu s ohľadom na presnosť výpočtu MPG potrebujeme, aby spĺňali minimálne požiadavku spojitosti parciálnych derivácií 1. a 2. rádu. Kvadratická splajnová interpolácia bude mať napr. buď nespojitú, alebo konštantnú deriváciu 2. rádu, čo zrejme spôsobí aj na hladkom georeliéfe nespojitú krivosť ω a κ , prípadne budú ω a κ konštantné vo všetkých bodoch georeliéfu. V dôsledku toho je kvadratická splajnová funkcia vhodná na výpočet a modelovanie MPG γ_N a A_N vypočítaných na základe parciálnych derivácií z_x a z_y .

Zlepšenie aproximácie spojitej plochy georeliéfu dosiahneme, ak v zmysle prác J. Krcha (1977), J. Krcha a Š. Reháka (1999) v jednotlivých bodoch reprezentatívneho DBP a v jednotlivých trojuholníkoch jeho primárnej trojuholníkovej siete okrem už spomenutých požiadaviek stanovíme podmienky pre normály na georeliéf. Vieme, že ak by sme mali teoreticky presnú reprezentatívnu nepravidelnú sieť bodov georeliéfu spĺňajúcu podmienky reprezentatívnosti a podmienky konfigurácie, potom normály na trojuholníky siete budú teoreticky presné normály na georeliéf v bode ležiacom nad ťažiskom trojuholníka (Krcho 1999a,b). Ak však pracujeme s pravidelným DBP, nemáme splnenú reprezentatívnosť a ani teoretickú presnosť DBP čo do konfigurácie jeho bodov. Napriek tomu môžeme vypočítať síce približné, ale dostatočne presné vektory normál zo susedných bodov DBP. Podmienky stanovené pre normálu

$$N = (-z_x, -z_y, 1) \quad (9)$$

priamo ovplyvňujú prvé parciálne derivácie aproximujúcej funkcie. N je vektor normály na plochu, definovanú aproximujúcou funkciou $z(x, y)$. Hodnoty normály môžeme zo vstupného DBP poľa získať: 1. priamym predpísaním derivácií z_x, z_y , 2. výpočtom normály N (9) pre bod $v_{i,j}$ z jeho štyroch susedov a 3. výpočtom normály z ôsmich susedných bodov okolia bodu v DBP.

5.1 Priame predpísanie derivácií z_x, z_y

Hodnotu z_x v bode $v_{i,j}$ nahradíme hodnotou smernice priamky prechádzajúcej bodmi $v_{i-1,j}, v_{i+1,j}$.

$$z_x^{i,j} = \frac{\Delta_z^{i,j}(x)}{\Delta_x^{i,j}}, \quad (10)$$

analogicky v smere y:

$$z_y^{i,j} = \frac{\Delta_z^{i,j}(y)}{\Delta_y^{i,j}}, \quad (11)$$

kde $\Delta_z^{i,j}(y) = z_{i,j+1} - z_{i,j-1}$,

$$\Delta_x^{i,j} = x_{i+1,j} - x_{i-1,j},$$

$$\Delta_y^{i,j} = y_{i,j+1} - y_{i,j-1}.$$

Po dosadení (10) a (11) do (9) dostávame vzťah

$$N = \left(-z_x^{i,j}, -z_y^{i,j}, 1 \right) = \left(-\frac{\Delta_z^{i,j}(x)}{\Delta_x^{i,j}}, -\frac{\Delta_z^{i,j}(y)}{\Delta_y^{i,j}}, 1 \right). \quad (12)$$

5.2 Výpočet normály N (9) pre bod $V_{i,j}$ z jeho štyroch susedov $V_{i-1,j}$, $V_{i+1,j}$, $V_{i,j-1}$, $V_{i,j+1}$

Uvažujme trojuholníky $V_{i+1,j}V_{i,j}V_{i,j+1}$, $V_{i,j+1}V_{i,j}V_{i-1,j}$, $V_{i-1,j}V_{i,j}V_{i,j-1}$, $V_{i,j-1}V_{i,j}V_{i+1,j}$ a označme vektory tvoriace strany uvedených trojuholníkov s koncovým bodom $V_{i,j}$ takto:

$$W_0^{i,j} = V_{i+1,j} - V_{i,j}, \quad W_1^{i,j} = V_{i,j+1} - V_{i,j}, \quad W_2^{i,j} = V_{i-1,j} - V_{i,j}, \quad W_3^{i,j} = V_{i,j-1} - V_{i,j}.$$

Pre normálu platí vzťah:

$$N = (x_N, y_N, z_N) = W_0^{i,j} \times W_1^{i,j} + W_1^{i,j} \times W_2^{i,j} + W_2^{i,j} \times W_3^{i,j} + W_3^{i,j} \times W_0^{i,j} \quad (13)$$

ktorý je priamym podkladom na vyjadrenie parciálnych derivácií.

Po úprave normály (13) na tvar

$$N' = \frac{N}{z_N} = \left(\frac{x_N}{z_N}, \frac{y_N}{z_N}, 1 \right)$$

pre z_x, z_y platí

$$z_x = \frac{x_N}{z_N}; \quad z_y = \frac{y_N}{z_N}. \quad (14)$$

5.3 Výpočet normály z ôsmich susedných bodov okolia bodu v DBP

Budeme uvažovať osem trojuholníkov, ktoré majú spoločný vrchol $V_{i,j}$. Vektory $W_k^{i,j}, k=0,1,\dots,8$ sú určené rozdielmi: $W_0^{i,j} = V_{i+1,j} - V_{i,j}$, $W_1^{i,j} = V_{i+1,j+1} - V_{i,j}$, $W_2^{i,j} = V_{i,j+1} - V_{i,j}$, $W_3^{i,j} = V_{i-1,j+1} - V_{i,j}$, $W_4^{i,j} = V_{i-1,j} - V_{i,j}$, $W_5^{i,j} = V_{i-1,j-1} - V_{i,j}$, $W_6^{i,j} = V_{i,j-1} - V_{i,j}$, $W_7^{i,j} = V_{i+1,j-1} - V_{i,j}$.

Normálu vyjadríme podobne ako v prípade 5.2.

$$N = (x_N, y_N, z_N) = W_0^{i,j} \times W_1^{i,j} + W_1^{i,j} \times W_2^{i,j} + W_2^{i,j} \times W_3^{i,j} + W_3^{i,j} \times W_4^{i,j} + W_4^{i,j} \times W_5^{i,j} + W_5^{i,j} \times W_6^{i,j} + W_6^{i,j} \times W_7^{i,j} + W_7^{i,j} \times W_0^{i,j} \quad (15)$$

$$N' = \frac{N}{z_N} = \left(\frac{x_N}{z_N}, \frac{y_N}{z_N}, 1 \right).$$

V bodoch 5.2 a 5.3 sa normála počíta ako "vážený" priemer smerov normál na jednotlivé trojuholníky. "Vážený" preto, že dĺžka výsledku vektorového súčinu sa rovná dvojnásobku obsahu trojuholníka, ktorý je daný činiteľmi; smer výslednej normály závisí nielen od smerov rovín, ktoré sú určené trojuholníkmi, ale aj od ich konkrétneho tvaru a veľkosti.

Postup, spomenutý v bode 5.3, môžeme zlepšiť, ak v štvorcoch okolo bodu V_{ij} budeme uvažovať tie trojuholníky, ktorých koncové body majú najväčší rozdiel výšok.

V tejto práci sme sa obmedzili na uvedené tri prípady, niektoré ďalšie možnosti budeme skúmať v ďalšej práci. Teraz sme testovali presnosť výpočtu výšok georeliéfu, sklonu georeliéfu v smere spádovej krivky a orientácie georeliéfu voči svetovým stranám pri použití C1-spojitej B-splajnovej interpolácie georeliéfu.

6. B-splajnová interpolačná plocha

B-splajnová plocha, je zložená plocha, ktorej čiastkovými plochami sú Bezierove plochy (BP). Takéto plochy, rovnako ako B-splajnové a Bezierove krivky sú často používané v počítačovom dizajne - sú ľahko vyčísliteľné a dá sa dobre modelovať ich výsledný tvar.

Bezierova plocha je daná riadiacou sieťou $\{V_{i,j}\}_{i=0,1,\dots,m}^{j=0,1,\dots,n}$, ktorá nemusí byť pravidelná. Je to zobrazenie z dvojrozmerného do trojrozmerného priestoru. Formálne zapísané:

$$B^{m,n}(u,v): E^2 \rightarrow E^3, \quad u \in \langle 0,1 \rangle, \quad v \in \langle 0,1 \rangle$$

kde m je stupeň u -kriviek a n je stupeň v -kriviek; u -krivka je podmnožina BP s konštantným parametrom v . V našom prípade položíme $m = n$.

Pri vhodnej voľbe riadiacej siete je možné dosiahnuť tvar:

$$B^{n,n}(x,y): E^2 \rightarrow R, \quad x \in \langle 0,1 \rangle, \quad y \in \langle 0,1 \rangle$$

čiže dostávame predpis polynomickej funkcie dvoch premenných. Body BP sa vypočítajú podľa vzťahu

$$B^{n,n}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n V_{i,j} B_i^n(x) B_j^n(y), \quad (16)$$

$$\text{kde } B_i^n(x) = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i \quad \text{a} \quad B_j^n(y) = \binom{n}{j} (1-y)^{n-j} y^j$$

Takto definovaná plocha interpoluje rohové body riadiacej siete $V_{0,0}, V_{0,n}, V_{n,0}, V_{n,n}$, je afinne invariantná a leží v konvexnom obale riadiacej siete (Farin 1990). V našej práci interpolujeme pravidelné BP, pričom z uvedených vlastností BP vyplýva, že každý štvorec budeme interpolovať jednou BP; vhodné je použiť bikubickú B-splajnovú plochu s požiadavkou na C1 spojitý prechod cez hraničné krivky jednotlivých BP. G. Farin (1990) uvádza podmienky, za ktorých je C1 spojitost splnená. Tie nám určia pre každú čiastkovú BP osem z dvadsiatich neznámych riadiacich vrcholov siete.

Zvyšné vrcholy $V_{1,1}, V_{1,2}, V_{2,1}, V_{2,2}$ možno určiť niektorou z metód z práce G. Farina (1990). My sme zvyšné body určili tak, aby vznikli rovnobežníky $V_{0,0}V_{0,1}V_{1,0}V_{1,1}, V_{0,2}V_{0,3}V_{1,3}V_{1,2}, V_{2,0}V_{3,0}V_{3,1}V_{2,1}, V_{2,3}V_{3,3}V_{3,2}V_{2,2}$.

Bikubickú splajnovú interpoláciu s uvedenými podmienkami sme použili na uvedené modelové územie s pravidelnou sieťou 50m x 50m. Výstupy sú uspokojivé len pre nadmorskú výšku georeliéfu. Ostatné morfometrické parametre a prvé parciálne derivácie sú v praxi nepoužiteľné. Keďže sme požadovali iba C1 spojitost druhé derivácie zostali nespojité a pravidelná štruktúra vstupného bodového poľa sa prejavila už na prvých deriváciách.

7. Lagrangeova interpolácia výšok v spádnicových rezoch georeliéfu

Vstupné DBP výšok z uvedeného modelovaného územia sme získali odčítaním z mapového listu 44-22-13 Základnej mapy SR. Bol zvolený postup začínajúci kubickou Lagrangeovou interpoláciou výšky v spádnicovom reze georeliéfu. Ak cez každý bod pravidelnej siete vedieme spádnicu, potom vrstevnice, ktoré pretína, delia ju na jednotlivé úseky U_j . Uvažujeme úseky U_{i-1}, U_j, U_{i+1} tak, že na úseku U_i leží bod, ktorý chceme odčítať, pričom U_{i-1}, U_{i+1} sú jeho susedné úseky. V spádnicovom reze bude v smere vodorovnej osi rásť parameter t , vyjadrujúci vzdialenosť na spádnici (na jej obraze na mape), v smere zvislej osi budeme nanášať výšky. Štyri známe výšky na spádnici budú koncové body úsekov U_{i-1}, U_i, U_{i+1} (ležia na vrstevniciach). Potom môžeme použiť Lagrangeovu interpoláciu 3. stupňa:

$$L(t) = \sum_{i=0}^3 z_i L_i(t), \quad (17)$$

$$\text{kde } L_i(t) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 (t - t_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 (t_i - t_j)},$$

t_i sú hodnoty parametra t , ktoré prislúchajú hraničným bodom úsekov U_{i-1} , U_i , U_{i+1} a sú zoradené vzostupne podľa nadmorskej výšky.

Dáta sme odčítali v prostredí Microstation 95 na zoskenovanom podklade mapového listu 44-22-13. Spádnicu sme aproximovali lomenými čiarami, pozdĺž ktorých sme potom merali vzdialenosti (jednou z funkcií Microstation 95). Takto odčítané hodnoty sme použili ako vstupné DBP, takže ich ďalej budeme uvažovať ako teoreticky presné. Namierané údaje sme využili ešte na určenie sklonu georeliéfu v smere spádovej krivky (γ_N) a orientácie voči svetovým stranám (A_N).

Keďže γ_N je uhol dotýčnice ku spádovej krivke a roviny (x,y) , platí

$$\text{tg}(\gamma_N) = \frac{\partial L(t)}{\partial t}. \quad (18)$$

Po derivovaní

$$\frac{\partial L_i(t)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 (t - t_j) \right)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 (t_i - t_j)} = \frac{3t^2 - 2t \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 t_j + \sum_{\substack{k=0, l=0 \\ k \neq i, j \neq i, k \neq l}}^3 t_k \cdot t_l}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 (t_i - t_j)}$$

platí

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = \sum_{i=0}^3 z_i \frac{\partial L_i(t)}{\partial t}. \quad (19)$$

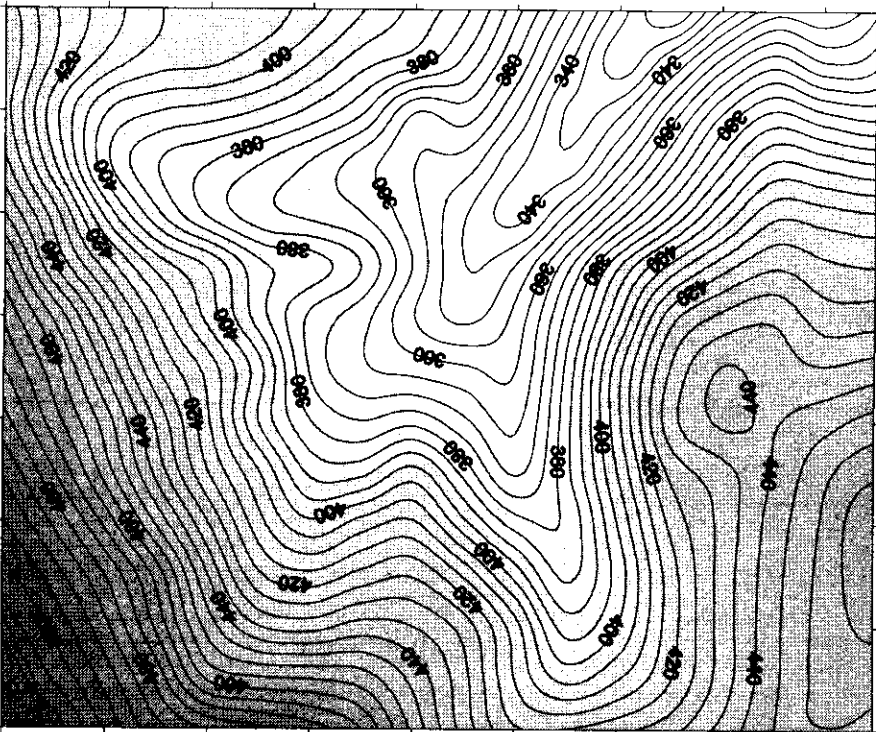
Orientáciu a A_N sme odčítali priamo nástrojom Microstation95 na odčítavanie uhlov.

8. Experimenty

Kartometricky získané pravidelné DBP z modelového územia sme interpolovali metódou Kriging v programe Surfer 6.03 a vlastnou implementáciou C1 spojitej B-splajnovej interpolácie. Modelovali sme pole výšok (obr. 1, 2), pole orientácie georeliéfu voči svetovým stranám (obr. 3, 4, 5, 6) a pole sklonov georeliéfu v smere spádovej krivky (obr. 7, 8, 9, 10).

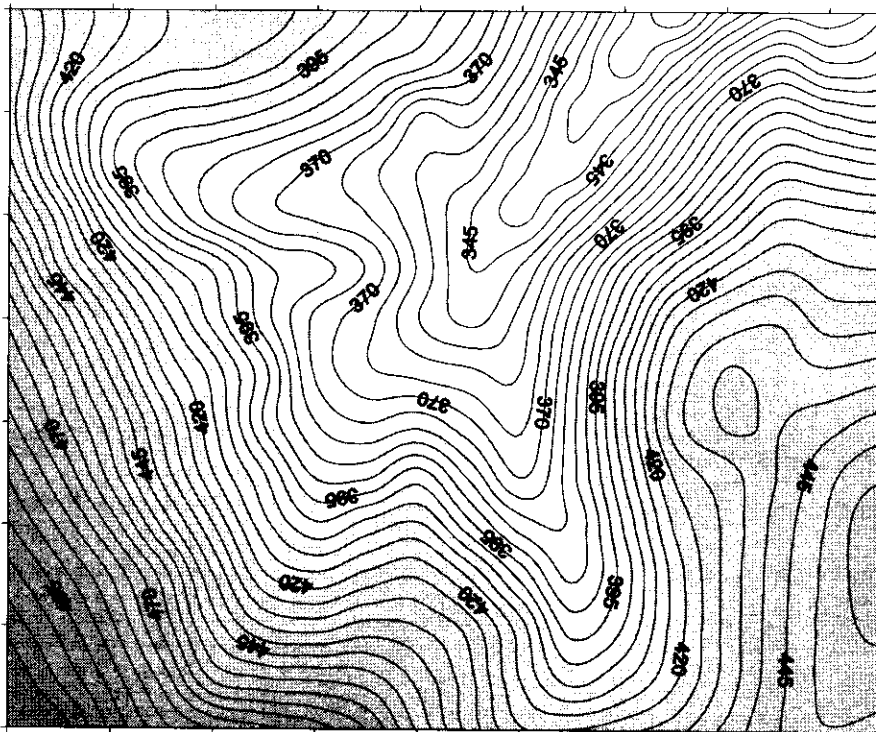
Na výpočet polí orientácie a sklonov, ktoré sa počítajú pomocou prvých parciálnych derivácií funkcie georeliéfu sme použili postupne vzťahy (12), (13) a (15). Tieto vzťahy používame aj pri výpočte B-splajnovej interpolácie (časť 6). Výpočet normály používame v dvoch krokoch: pri výpočte a pri interpolácii vypočítaného poľa MPR. Problematika hodnotenia výsledkov pri rôznych voľbách vzťahov na výpočet v oboch spomenutých krokoch modelovania je rozsiahlejšia, lebo závisí od hustoty pravidelného DBP a geometrie georeliéfu.

B-splajnová interpolácia dáva dobré výsledky pri interpolácii skalárnych poílí nadmorských výšok z ako aj pri MPG γ_N a A_N počítaných zo vzťahov (5) a (6). Je však citlivá na hustotu vstupného pravidelného DBP. Táto citlivosť sa ale prejavuje odlišne pri interpolácii skalárneho poľa výšok a pri výpočte MPG. Pri výpočte z je B-splajnová interpolácia menej citlivá ako pri výpočte z_x a z_y , použitých vo vzťahoch (5) a (6). Na výpočet MPG γ_N a A_N . Prvé parciálne derivácie sa vo vzťahoch (5) a (6) vyskytujú v druhej mocnine, takže výpočet γ_N a A_N z interpolačnej B-splajnovej plochy poľa nadmorských výšok je citlivejší, než samotná interpolácia výšok z .



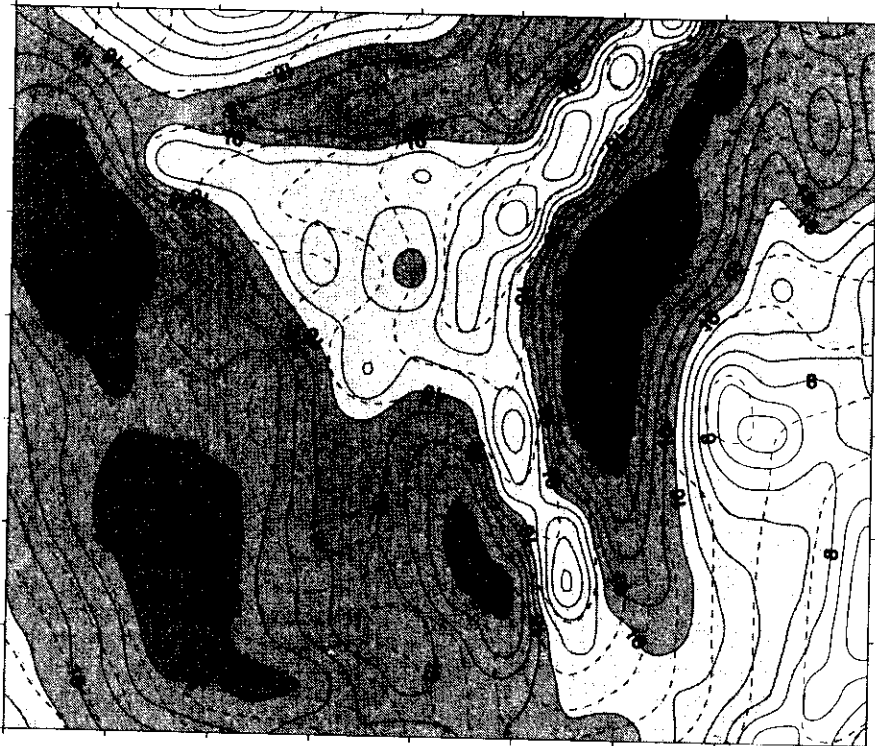
Obr. 1 Izočiary poľa nadmorských výšok interpolované B-splajnovou interpoláciou. Pri výpočte parciálnych derivácií bol použitý vzťah (1.2).

Fig. 1 Isolines of altitudes field interpolated using B-spline interpolation (B1). For calculating of the partial derivatives was used the formula (1.2) where z_{ij} and z_{ij}^0 are the partial derivatives of interpolating surface and z_{ij}^0 is value of scalar in the input data field (e. g. altitude).



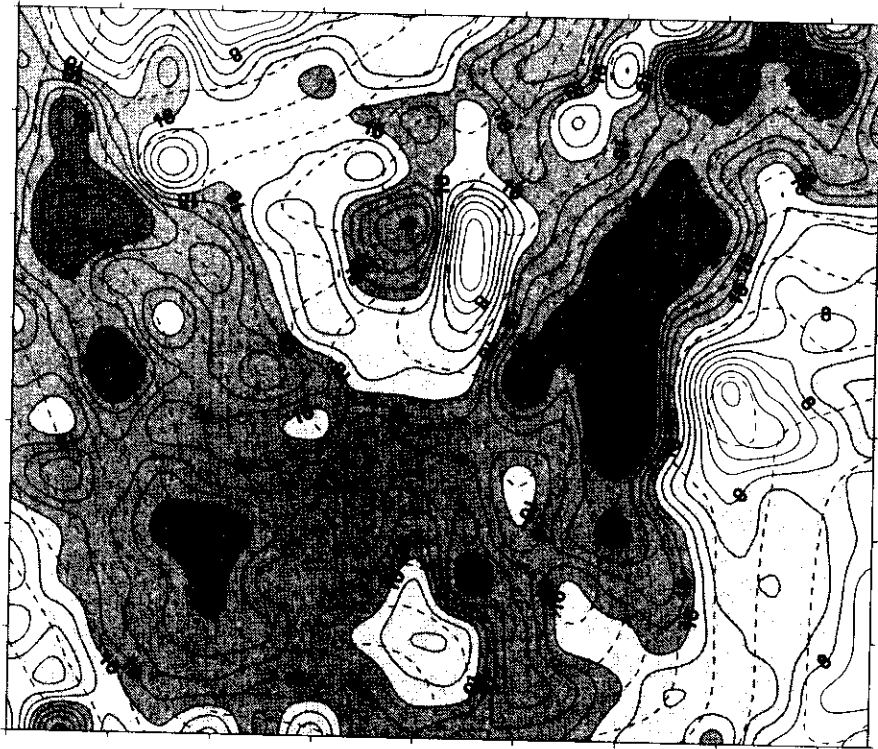
Obr. 2 Izočiary poľa nadmorských výšok interpolované B-splajnovou interpoláciou. Pri výpočte parciálnych derivácií bol použitý vzťah (1.5).

Fig. 2 Isolines of altitudes field interpolated using B1. For calculating of the partial derivatives was used the formula (1.5) where v_{ij} are points of the input discrete data field.



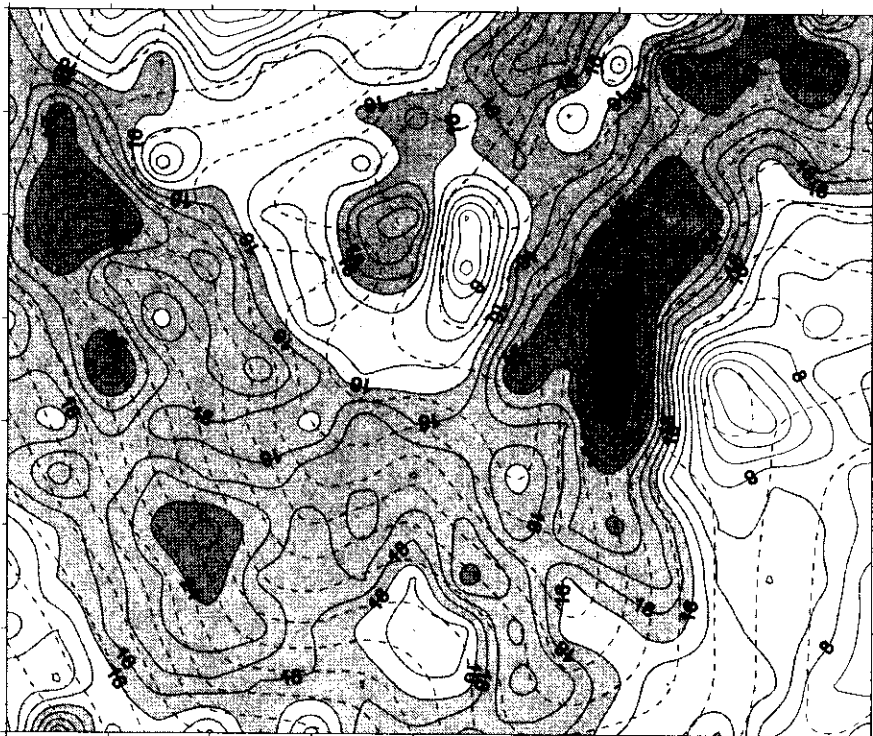
Obr. 3 Isočiarly pola sklonov georeliéfu v smere spádových kriviek interpolovaného B-splajnovou interpoláciou. Pri výpočte parciálnych derivácií interpolácie plochy bol použitý vzťah (15). Pole sklonov je vypočítané pomocou vzťahov (15) a (5) zo vstupného PDBP nadmorských výšok. Prerušované čiary sú vrstevnice z obr. 2.

Fig. 3 Isolines of the slope in the direction of slope curves (γ_n) interpolated using BI. For calculating of the partial derivatives of interpolating surface was used the formula (15). Discrete field of the γ_n is calculated from input discrete field of altitudes using (15) and (5). Dashed isolines are contours from fig. 2.



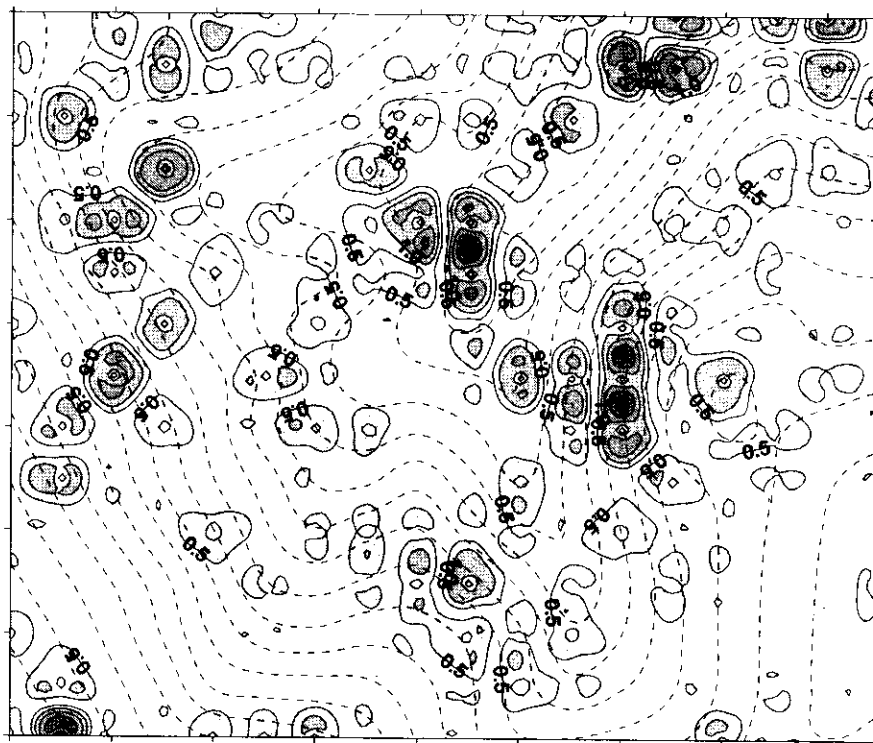
Obr. 4 Isočiarly pola sklonov georeliéfu v smere spádových kriviek interpolovaného B-splajnovou interpoláciou. Pri výpočte parciálnych derivácií interpolácie plochy bol použitý vzťah (15). Pole sklonov v bodoch PDBP je získané interpoláciou zo spádových kriviek prechádzajúcich týmito bodmi. Prerušované čiary sú vrstevnice z obr. 2.

Fig. 4 Isolines of γ_n interpolated using BI. For calculating of the partial derivatives of interpolating surface was used the (15). Discrete field of the γ_n is calculated from slope curves. Dashed isolines are contours from fig. 2.



Obr. 5 Izočiary pola sklonov georeliéfu v smere spadových kriviek interpolovaného Krigingom. Pole sklonov je vypočítané zo vstupného diskrétného bodového pola nadmorských výšok pomocou vzťahu (15) a (5). Prerušované čiary sú vrstevnice z obr. 2.

Fig. 5 Isolines of the γ_k interpolated using Kriging. Discrete field of the γ_k is calculated from DDF of altitudes using (15) and (5). Dashed isolines are contours from fig. 2.



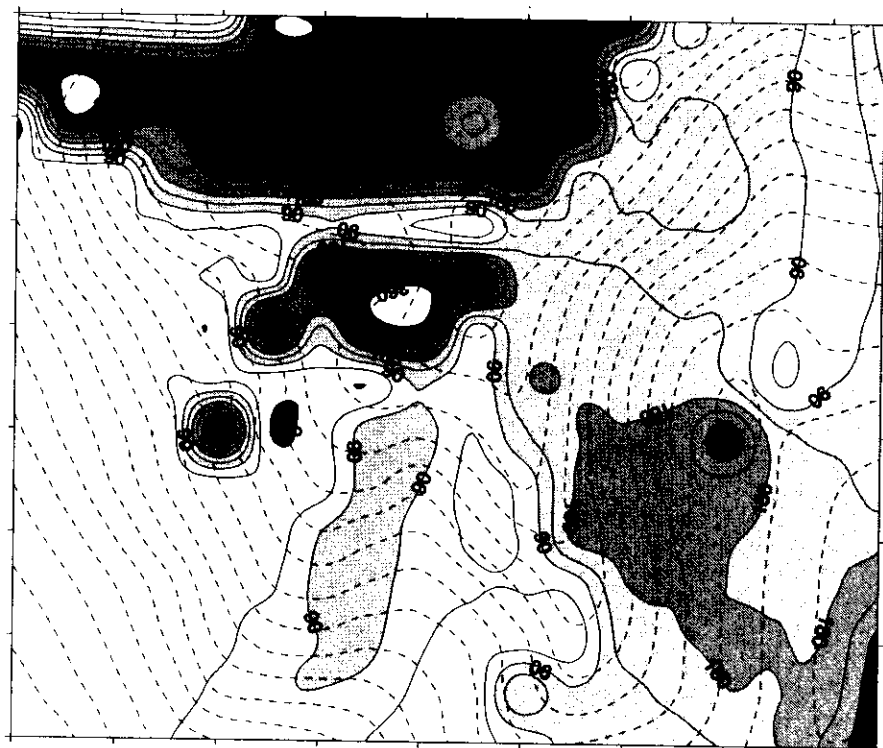
Obr. 6 Izočiary absolútnych hodnôt rozdielov poli sklonov v smere spadových kriviek zobrazených na obr. 4 a 5. Prerušované čiary sú vrstevnice z obr. 2.

Fig. 6 Isolines of absolute values of differences of fields of γ_k , drawn on fig. 4 and fig. 5. Dashed isolines are contours from fig. 2.



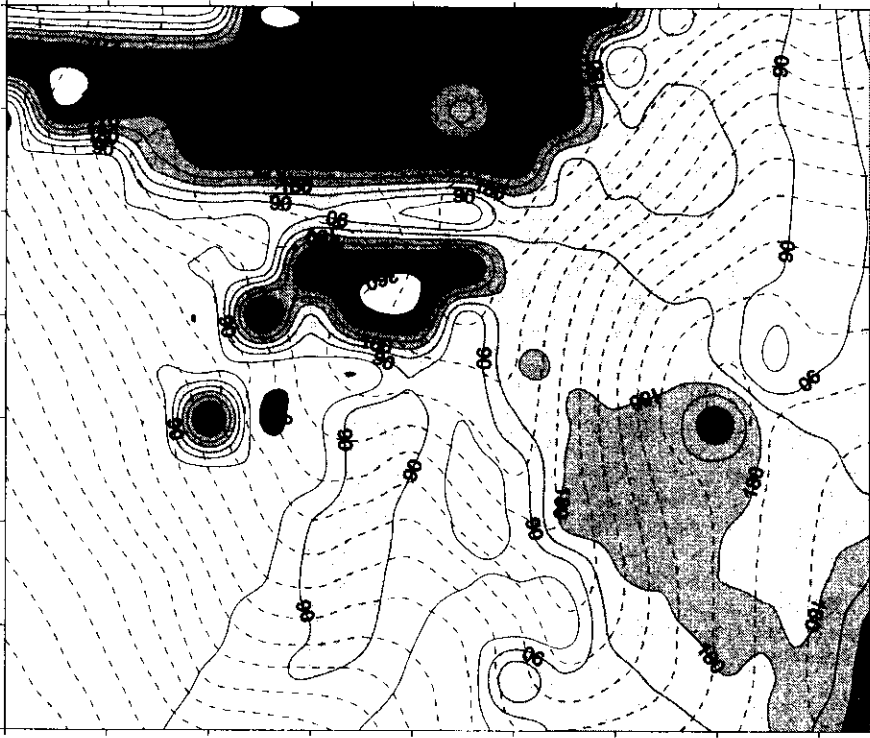
Obr. 7 Izočiary pola orientácii georeliefu voči svetovým stranám interpolovaného B-splajnovou interpoláciou. Pri výpočte parciálnych derivácií interpoláčnej plochy bol použitý vzťah (15). Pole orientácii je vypočítané zo vstupného diskretného bodového pola nadmorských výšok pomocou vzťahov (15) a (5). Prerušované čiary sú vrstevnice z obr. 2.

Fig. 7 Isolines of orientation of the georelief to the cardinal points (A_n) using BI. Partial derivatives of interpolating surface are calculated using (15). Field of A_n calculated from input discrete field of altitudes using (15) and (5). Dashed lines are contours from fig. 2.



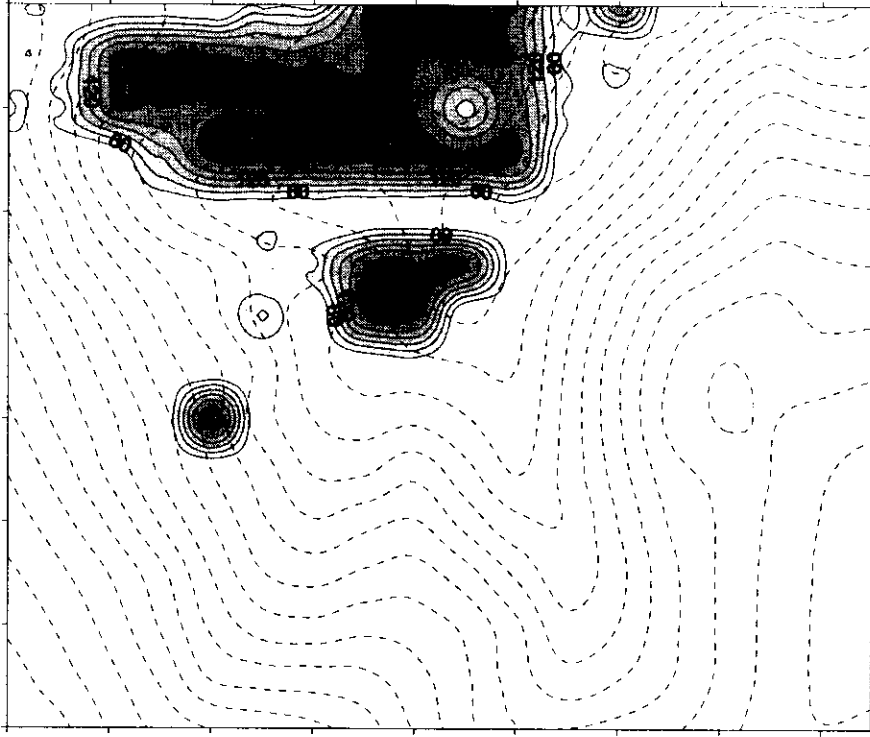
Obr. 8 Izočiary pola orientácii georeliefu voči svetovým stranám interpolovaného B-splajnovou interpoláciou. Pri výpočte parciálnych derivácií interpoláčnej plochy bol použitý vzťah (15). Pole orientácii je získané interpoláciou v bodoch PDBP z aproximácie spádových kriviek prechádzajúcich týmito bodmi.

Fig. 8 Isolines of orientation of the georelief to the cardinal points (A_n) using BI. Partial derivatives of interpolating surface are calculated using (15). Field of A_n calculated from the slope curves. Dashed isolines are contours from fig. 2.



Obr. 9 Izočiary pola orientácií georeliéfu voči svetovým stranám interpolovaného B-Krigingom. Prerušované čiary sú vrstevnice z obr. 2.

Fig. 9 Isolines of orientation of the georelief to the cardinal points (A_n) interpolated by Kriging. Field of A_n calculated using (14) and (5). Dashed lines are contours from fig. 2.



Obr. 10 Izočiary absolútnych hodnôt rozdielov polí orientácií georeliéfu voči svetovým stranám zobrazeným na obr. 8 a obr.9. Prerušované izočiary sú vrstevnice z obr. 2.

Fig. 10 Isolines of absolute values of differences of fields of A_n drawn on fig. 8 and fig. 9. Dashed isolines are contours from fig. 2.

9. Záver

Skúmali sme niektoré aspekty interpolácie pravidelných DBP z , γ_N a A_N . Na pravidelnom DBP z modelového územia boli vykonané nasledujúce operácie:

1. Výpočet približných hodnôt prvých parciálnych derivácií funkcie výšky georeliéfu určených vzťahom (12) a vzťahmi (13) a (14).

2. Interpolácia skalárnych polí z , γ_N a A_N metódou Kriging v programe Surfer 6.03 a vlastná implementácia C1 spojitej B-splajnovej interpolácie.

Hodnotenie výsledkov na výpočet normál pri použití rôznych vzťahov je, ako sa spomína v časti 8, rozsiahlejší problém, ktorému sa budeme venovať v ďalšej práci.

Literatúra

- FARIN, G. (1990). *Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide*. London.
- KRCHO, J. (1968). Prírodná časť geosféry ako kybernetický systém a jeho vyjadrenie v mape. *Geografický časopis*, 20, 2, s. 115-139.
- KRCHO, J. (1997). Digitálny model terénu z hľadiska morfometrickej analýzy. *Geodetický a kartografický obzor*, 23/65, 2, s. 34-45.
- KRCHO, J. (1990). *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu*. Bratislava. Veda.
- KRCHO, J. (1999a). Vplyv konfigurácie bodov vstupného bodového poľa na polohovú a numerickú presnosť modelovania georeliéfu pomocou DTM. *Geodetický a kartografický obzor* (v tlači).
- KRCHO, J. (1999b). Digitálne modely georeliéfu (DTM) ako modelačný nástroj v prostredí GIS. Polohová a numerická presnosť morfometrických parametrov. *Geografický časopis* (v tlači).
- KRCHO, J., REHÁK, Š. (1999). Priestorové a štrukturálne aspekty regulácie vody v povodí poľnohospodárskej krajiny. *Vedecké práce*. Bratislava, Výskumný ústav závlahového hospodárstva, s. 109-136.
- ZLOCHA, M. (1996). *Analýza morfometrických vlastností reliéfu a podpovrchových štruktúr v ložiskovej a environmentálnej geológii. /Kandidátska dizertačná práca/*. Bratislava.

S u m m a r y

The Properties on Interpolation Methods Used for Georelief Modeling and Its Influence on the Calculation of Morphometric Parameters

Digital model of georelief allows us to calculate mathematic model of scalar fields of morphometric parameters of georelief like altitude z , slope of georelief in the direction of slope curves γ_N , orientation of georelief to the cardinal points A_N , and others. In addition to subscribing of georelief geometry these parameters locate the space distribution and intensity of processes (e.g. erosion) occurring in the georelief.

We examined some aspects of interpolation of regular discrete data fields (DDF) of z , γ_N and A_N . We calculated surface models of scalar fields of these parameters using different ways of normals enumerating to set partial derivatives of interpolating function. For modeling we used own implementation of C1-continuous B-spline interpolation of DDF and Kriging method implemented in Surfer 6.03. We observed difference between results of these two models using miscellaneous formulas for enumeration of normals.

Because of the influence of regularity of input data field B-spline interpolation we used is not proper for straight enumeration of γ_N and A_N . However results of interpolation of fields of z , γ_N and A_N gives us good enough results. In future work we will research higher order interpolations concerning enumeration of morphometric parameters whose formulas includes partial derivatives of higher order as well as detailed view to numerical and location accuracy of used interpolating models.

Lektoroval:

Prof. RNDr. Jozef KRCHO, DrSc.,
Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského,
Bratislava