1 Vyšetrovanie vlastností zobrazenia

Zistite, či dané zobrazenia patria do niektorej skupiny jednoduchých zobrazení; zistite vlastnosti daných zobrazení:

a)

$$X = R\varphi$$
$$Y = R\cos\varphi_0\lambda$$

Dané zobrazenie patrí medzi valcové zobrazenia.

- Podmienka ekvidištančnosti zobrazenia (valcové zobrazenie môže byť ekvidištančné iba v smere poludníkov):

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{R} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = R^2 \tag{1}$$
$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \tag{2}$$
$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = R \tag{3}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = 0 \tag{4}$$

  Po dosadení 3 a 4 do 2:

$$E = R^2 + 0^2 = R^2 \tag{5}$$

  Podmienka 1 v danom zobrazení platí, preto **je dané zobrazenie ekvidištančné v smere poludníkov.**

- Podmienka ekvivalentnosti zobrazenia:

$$m_{pl} = \frac{H}{R^2\cos\varphi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H = R^2\cos\varphi \tag{6}$$
$$H = \frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial X}{\partial \lambda}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \tag{7}$$
$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0 \tag{8}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = R\cos\varphi_0 \tag{9}$$

  Po dosadení 3, 4, 8 a 9 do 7

$$H = R \cdot R\cos\varphi_0 = R^2\cos\varphi_0 \neq R^2\cos\varphi \tag{10}$$

  Podmienka ekvivalentnosti zobrazenia 6 nie je splnená, preto **dané zobrazenie nie je ekvivalentné.**

- Valcové zobrazenie je konformné, ak platí:

$$m_p = m_r \tag{11}$$

$$\frac{E}{R^2} = \frac{G}{R^2 \cos\varphi} \tag{12}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2}{R^2} = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2}{R^2 \cos^2\varphi} \tag{13}$$

$$1 = \frac{R^2 \cos^2\varphi_0}{R^2 \cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi} \tag{14}$$

  Z rovnosti 14 vyplýva, že podmienka 11 platí len pre rovnobežku $\varphi = \varphi_0$, preto **dané zobrazenie nie je konformné.**

b)

$$X = R \sin\varphi$$
$$Y = R\lambda$$

Dané zobrazenie patrí medzi valcové zobrazenia.

- Podmienka ekvidištančnosti zobrazenia (valcové zobrazenie môže byť ekvidištančné iba v smere poludníkov):

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{R} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = R^2 \tag{15}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = R \cos\varphi \tag{16}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = 0 \tag{17}$$

$$E = (R\cos\varphi)^2 + 0 = R^2 \cos^2\varphi \tag{18}$$

  Zo vzťahu 18 vyplýva, že podmienka 15 neplatí, preto **dané zobrazenie nie je ekvidištančné.**

- Podmienka ekvivalentnosti zobrazenia:

$$m_{pl} = \frac{H}{R^2 \cos\varphi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H = R^2 \cos\varphi \tag{19}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = R \tag{21}$$

$$H = R\cos\varphi \cdot R - 0 = R^2 \cos\varphi \tag{22}$$

  Podmienka 19 je splnená, preto **je dané zobrazenie ekvivalentné.**

- Valcové zobrazenie je konformné, ak platí:

$$m_p = m_r \tag{23}$$

$$\frac{E}{R^2} = \frac{G}{R^2 \cos\varphi} \tag{24}$$

$$\frac{(R\cos\varphi)^2 + 0}{R^2} = \frac{\left(0 + R^2\right)}{R^2 \cos^2\varphi} \tag{25}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \tag{26}$$

$$\cos^4\varphi = 1 \tag{27}$$

  Rovnosť 27 platí len pre $\varphi = 0°$, preto podmienka 23 a **dané zobrazenie nie je konformné.**

c)

$$X = Rz\cos\lambda$$
$$Y = Rz\sin\lambda$$

Dané zobrazenie patrí medzi azimutálne zobrazenia.

- Azimutálne zobrazenie môže byť ekvidištančné v smere poludníkov, alebo v smere rovnobežiek:

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{R} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = R^2 \tag{28}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\varphi} = \frac{\partial R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos\lambda}{\partial\varphi} = -R\cos\lambda \tag{29}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\varphi} = \frac{\partial R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\lambda}{\partial\varphi} = -R\sin\lambda \tag{30}$$

$$E = (-R\cos\lambda)^2 + (-R\sin\lambda)^2 = R^2 \tag{31}$$

  V danom zobrazení platí podmienka 28, preto **je dané zobrazenie ekvidištančné v smere poludníkov.**

- Test ekvidištančnosti v smere rovnobežiek:

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi} = 1 \quad G = R^2\cos^2\varphi \tag{32}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\lambda} = -Rz\sin\lambda \tag{33}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\lambda} = Rz\cos\lambda \tag{34}$$

$$G = (-Rz\sin\lambda)^2 + (Rz\cos\lambda)^2 = R^2z^2 \neq R^2\cos^2\varphi \tag{35}$$

  Podmienka 32 neplatí, preto **dané zobrazenie nie je ekvidištančné v smere rovnobežiek.**

- Podmienka ekvivalentnosti zobrazenia:

$$m_{pl} = \frac{H}{R^2 \cos\varphi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H = R^2 \cos\varphi \tag{36}$$

$$H = \frac{\partial X}{\partial\varphi}\frac{\partial Y}{\partial\lambda} - \frac{\partial X}{\partial\lambda}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} \tag{37}$$

$$H = -R\cos\lambda Rz\cos\lambda - (-Rz\sin\lambda)(-R\sin\lambda) = -R^2 z \tag{38}$$

  Podmienka 36 v danom zobrazení neplatí, preto **dané zobrazenie nie je ekvivalentné.**

- Azimutálne zobrazenie je konformné, ak platí:

$$m_p = m_r \tag{39}$$

$$\frac{E}{R^2} = \frac{G}{R^2\cos\varphi} \tag{40}$$

  po dosadení parciálnych derviácií:

$$1 = \frac{z^2}{\cos^2\varphi} \tag{41}$$

  Podmienka 39 neplatí, preto **dané zobrazenie nie je konformné**

d)

$$X = R\varphi$$
$$Y = R\cos\varphi\lambda$$

Dané zobrazenie patrí medzi nepravé zobrazenia.

- Podmienka ekvidištančnosti zobrazenia v smere poludníkov:

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{R} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = R^2 \tag{42}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\varphi} = R \tag{43}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\varphi} = -R\sin\varphi\lambda \tag{44}$$

$$E = (R)^2 + (-R\sin\varphi\lambda)^2 = R^2\left(1 + \sin^2\varphi\lambda^2\right) \neq R^2 \tag{45}$$

  Podmienka 42 neplatí, preto **dané zobrazenie nie je ekvidištančné v smere poludníkov.**

- Test ekvidištančnosti v smere rovnobežiek:

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi} = 1 \quad G = R^2\cos^2\varphi \tag{46}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = R\cos\varphi \tag{48}$$

$$G = 0 + (-R\cos\varphi)^2 = R^2\cos^2\varphi \tag{49}$$

  Podmienka 46 platí, preto **dané zobrazenie je ekvidištančn v smere rovnobežiek.**

- Podmienka ekvivalentnosti zobrazenia:

$$m_{pl} = \frac{H}{R^2\cos\varphi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H = R^2\cos\varphi \tag{50}$$

$$H = \frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial X}{\partial \lambda}\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \tag{51}$$

$$H = RR\cos\varphi - R\sin\varphi\lambda \cdot 0 = R^2\cos\varphi \tag{52}$$

  Podmienka 50 platí, preto **je dané zobrazenie ekvivalentné.**

- Ľubovoľné zobrazenie je konformné, ak platí:

$$F = 0 \ \wedge \ m_p^2 = m_r^2 \tag{53}$$

$$F = R \cdot 0 - R\sin\varphi\lambda R\cos\varphi = \frac{R^2}{2}\sin 2\varphi\lambda \neq 0 \tag{54}$$

  Dané zobrazenie nie je konformné